

Thèse présentée en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

L'UNIVERSITE DE ROUEN

Ecole doctorale

SCIENCES PHYSIQUES, MATHÉMATIQUES
ET DE L'INFORMATION POUR L'INGÉNIEUR

Discipline

PHYSIQUE

par

Nicolas RIVIERE

Sujet de la thèse

**CONTRIBUTION DE LA POLARISATION
A L'ETUDE DE MILIEUX DIFFUSANTS
PEU DENSES OU OPTIQUEMENT EPAIS**

Soutenue le 8 septembre 2006 devant la commission d'examen :

Mme BAILLIS Dominique
MM. BRIOTTET Xavier
GIOVANNINI Hugues
GREHAN Gérard
HESPEL Laurent
JEANDEL Gérard

Rapporteur
Examineur
Président du jury
Directeur de thèse
Examineur
Rapporteur



A mes parents,
A Christelle, Vincent et Clémence.

« La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne.
La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi »
Albert Einstein, physicien américain (Nobel de Physique en 1921)

REMERCIEMENTS

Le travail de cette thèse porte sur la diffusion de la lumière dans les milieux denses ou optiquement épais. Madame Dominique Baillis et Monsieur Gérard Jeandel m'ont fait l'honneur d'accepter de juger ce travail. Je tiens à leur exprimer ici ma profonde gratitude.

J'ai passé mes trois années de thèse au sein du Département d'Optique Théorique et Appliquée (DOTA) de l'ONERA. Je remercie son Directeur, Monsieur René Jalin, pour m'avoir accueilli dans un département jeune et dynamique où j'ai pu m'épanouir aussi bien sur le plan professionnel que personnel. Notre passion commune pour le géo-référencement a généré de cordiaux échanges très productifs sur le plan humain.

Merci à Monsieur Xavier Briottet qui, à mes yeux, représente bien plus que mon premier Responsable d'Unité. Voisin de bureau, il a su me procurer des pauses « informatiques » pour me déconnecter temporairement de mes travaux et reprendre mes recherches plus efficacement. Merci pour tes petites histoires qui détendent l'atmosphère au moment du café du matin ou du thé de quatre heures !

Cette thèse n'aurait pu exister sans la présence de mon Directeur de thèse, Monsieur Gérard Gréhan. Même loin de Toulouse, parfois à l'autre bout du monde, il a toujours répondu à mes questions tout en me laissant une parfaite autonomie dans mes travaux.

Monsieur Laurent Hespel, responsable de l'unité, a co-encadré ma thèse au quotidien. Je lui présente mes plus vifs remerciements pour les nombreuses discussions scientifiques que nous avons eues et pour le temps qu'il m'a accordé en dehors de son travail. Je perçois désormais la thèse comme une véritable formation qui forge l'esprit critique. Ce fut pour moi une grande expérience.

J'exprime également ma reconnaissance envers toute l'équipe : André, Bernard G., Christian, Jean-Pierre et plus particulièrement Bernard T. pour son aide pratique et sa bonne humeur. Mes remerciements vont aussi à tout le personnel du DOTA Toulouse avec qui j'ai passé de merveilleux moments. Je tiens à remercier Christophe avec qui j'ai partagé le bureau pendant toutes ces années ; les Sophie pour leur soutien sans faille dans les moments les plus difficiles et pour leur esprit gagnant-gagnant ; Joël, son « Pélican » et leur accent du Sud Ouest ;

Véronique, Philippe D., François... Je décerne une mention spéciale à Geneviève considérée comme la mère adoptive de tous les doctorants toulousains. Elle a toujours su me simplifier les démarches administratives pour favoriser mes recherches. J'ai également apprécié la compagnie des jeunes thésards (anciens et nouveaux, sans aucune distinction) ainsi que les agréables soirées passées ensemble : merci à vous tous ! C'est avec beaucoup de plaisir que je retrouverai la « quatrième dent » après ma thèse.

Sur un plan plus personnel, je souhaite remercier mes amis de route qui ont toujours été présents à mes côtés pendant ces années de thèse. Je me rappellerai longtemps des soirées « pizza-boulot » passées avec Olivier : merci pour ton amitié infailible. Merci à Jean-Pierre, mon ami de cordée, pour les sorties « rando »... les sentiers pyrénéens nous ont permis de nous évader et d'oublier quelques instants le tumulte de la vie citadine. Merci à Jérôme pour ses innombrables blagues, ses grules et sa joie de vivre. Je n'oublierai jamais les très bons moments passés en compagnie d'Amandine, d'Antoine, de Nathalie, de Stéphanie et de Toup'. Y para concluir, muchas gracias a Ana para su sonrisa y para la enseñanza del idioma de su país. Gageons que le RU sera toujours ouvert pour que l'on puisse encore échanger nos points de vue sur la Science.

Je tiens à souligner le soutien indéfectible de ma famille sans qui je n'aurais pu affronter sereinement les étapes difficiles trouvées sur mon chemin. Je remercie en particulier mes parents pour m'avoir donné le goût des études et pour m'avoir épaulé pendant toutes ces années. Un grand merci à toi, Christelle... les précieux conseils que tu as prodigués à ton « petit frère » ont contribué au succès de ses études. Que serait la Science sans la confrontation des points de vue ? Merci Vincent pour les nombreux débats que nous avons eus ! Enfin, merci à ma petite filleule Clémence pour tout le bonheur qu'elle me procure à chaque fois que je la vois.

Nombreuses sont les personnes qui ont contribué au bon déroulement de cette thèse. Les citer toutes serait trop long. Je tiens donc à leur témoigner toute ma gratitude... elles se reconnaîtront !

TABLE DES MATIERES

Table des matières.....	i
Liste des figures.....	v
Liste des tableaux.....	xi
Glossaire.....	xiii
Introduction.....	1
CHAPITRE I : Notions sur les milieux diffusants.....	7
1 Introduction.....	7
2 Notions sur la polarisation de la lumière.....	7
2.1 Polarisation d'une onde électromagnétique plane.....	8
2.2 Formalismes utilisés pour représenter la polarisation de la lumière.....	9
3 Grandeurs caractéristiques d'un milieu diffusant.....	13
3.1 Notions sur les paramètres radiatifs.....	13
3.2 Données thermo-optiques mesurables.....	20
4 Synthèse.....	22
CHAPITRE II : Modélisation du transfert radiatif polarisé dans les milieux hétérogènes.....	23
1 Introduction.....	23
2 Résolution de l'équation du transfert radiatif polarisée en 1D.....	24
2.1 Généralités.....	24
2.2 Equation du Transfert Radiatif Polarisé.....	25
2.3 Résolution du transfert radiatif polarisé en géométrie 1D.....	27
2.3.1 Méthodes de résolution en géométrie 1D.....	27
2.3.2 Ecriture matricielle de l'ETRP.....	28
2.3.3 Calcul des matrices des diffusion.....	31
2.3.4 Calcul des luminances collimatées.....	33
2.3.5 Développement en série et processus de diffusion.....	35
2.3.6 Description de la méthode de résolution par <i>adding-doubling</i>	40
3 Transfert radiatif polarisé en géométrie 3D (code <i>MC3D</i>).....	44
3.1 Généralités sur les codes Monte Carlo.....	44

3.2	Présentation du code Monte Carlo 3D en géométrie cartésienne.....	46
4	Validations et intercomparaisons des outils numériques.....	55
4.1	Comparaisons avec des résultats bibliographiques.....	55
4.2	Additivité des luminances diffusées.....	58
4.3	Inter-comparaison des outils numériques en géométrie cartésienne.....	60
5	Etude comportementale de la diffusion polarisée.....	65
5.1	Prise en compte des différents états de la polarisation.....	65
5.2	Etude comportementale en polarisation rectiligne.....	69
6	Synthèse.....	73
CHAPITRE III : Optimisation de données expérimentales polarisées par méthode d'identification des paramètres.....		75
1	Vers l'identification des paramètres.....	75
2	Représentation de la matrice de diffusion.....	77
2.1	Problématique.....	77
2.2	Utilisation des troncatures numériques.....	78
2.3	Utilisation de fonctions modèles.....	84
2.4	Représentation finale de la matrice de phase.....	87
3	Etude de sensibilité de la diffusion polarisée.....	88
3.1	Notions de coefficients de sensibilité et nombre de conditionnement.....	89
3.2	Evolution angulaire des coefficients de sensibilité en incidence normale.....	91
4	Identification des paramètres en diffusion polarisée.....	109
4.1	Présentation des différentes méthodes d'optimisation.....	109
4.2	Définitions des fonctions « objectifs ».....	115
5	Validation numérique de la méthode d'identification des paramètres.....	120
5.1	Optimisation sur un seul paramètre.....	120
5.2	Optimisation sur plusieurs paramètres.....	125
5.3	Sensibilité aux données d'entrée.....	132
6	Conclusions sur l'optimisation de données de référence.....	147
CHAPITRE IV : Mesure de la diffusion polarisée, description du moyen d'étalonnage.....		151
1	Introduction.....	151
2	Description générale du banc de mesures.....	153
2.1	Génération de la luminance incidente.....	155
2.2	Echantillons et cuves à circulation.....	155
2.3	Mesure de la diffusion de la lumière.....	156
2.4	Mesure d'extinction sur le banc MELOPEE.....	158
3	Calibrage en polarisation de la mesure de diffusion.....	161
3.1	Calibrage de la première voie : mesures non polarisées.....	161
3.2	Calibrage de la deuxième voie : diffusion en polarisation croisée.....	163
3.3	Synthèse.....	170
4	Etalonnage des voies de mesure de la diffusion.....	171

4.1	Expressions formelles des constantes d'étalonnage	172
4.2	Déterminations expérimentales des fonctions d'appareil	177
5	Calibrage de la troisième voie pour les mesures d'extinction	187
6	Validation des concepts et exploitation de données polarisées	189
6.1	Validation des constantes d'appareil	189
6.2	Validation du concept général	191
7	Bilan sur la mesure de la diffusion polarisée	197
Conclusion		199
Annexes du chapitre I		205
A.	Morphologie des particules	205
B.	Distribution en taille des particules	206
Annexes du chapitre II		207
A.	Passage d'interfaces avec changement d'indice	207
B.	Quadratures numériques et cône de réfraction	209
Annexes du chapitre IV		211
A.	Compléments sur la présentation générale du banc <i>MELOPEE</i>	211
B.	Compléments sur la mesure d'extinction (limites de la méthode)	218
C.	Perspectives d'évolution du banc de mesure	220
C1.	Code Monte Carlo 3D en géométrie cylindrique	220
C2.	Mesures sur des cuves cylindriques	227
C3.	Mesure de la matrice de Mueller par modulation de la polarisation	228
Références bibliographiques		235

LISTE DES FIGURES

Figure 1 – Onde électromagnétique plane.....	8
Figure 2 – Polarisation elliptique.....	10
Figure 3 – Sphère de Poincaré.....	10
Figure 4 – Rotation des axes de polarisation.....	12
Figure 5 – Evolution des M_{ij} en fonction des angles de diffusion pour des particules de latex dans de l'eau ...	19
Figure 6 – Représentation des luminances pour un milieu diffusant unidimensionnel.....	21
Figure 7 – Géométrie d'un milieu hétérogène semi-infini, constitué par l couches homogènes.....	24
Figure 8 – Représentation du vecteur luminance en coordonnées cartésiennes.....	26
Figure 9 – Représentation du vecteur luminance dans le plan (x, O, y)	26
Figure 10 – Rotation des axes de polarisation lors du calcul de la matrice de phase.....	32
Figure 11 – Présence de réflexions lors du changement de couche avec modification de l'indice optique.....	33
Figure 12 – Changement d'indice entre deux couches homogènes.....	42
Figure 13 – Schéma général du principe d'interaction.....	43
Figure 14 – Schéma de principe des codes Monte Carlo pour l'étude de milieux diffusants.....	45
Figure 15 – (a) Définition des axes du repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en géométrie 3D cartésienne et (b) vue en coupe... 46	46
Figure 16 – Schéma de principe du code Monte Carlo 3D en géométrie cartésienne (cas général).....	47
Figure 17 – (a) Définition générale du repère absolu $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et (b) géométrie du passage à une interface en projection 2D dans le plan $(\vec{e}_x, O, \vec{e}_z)$	48
Figure 18 – Comparaison des distances R_i et R_c en projection dans le plan $(\vec{e}_x, 0, \vec{e}_z)$ en géométrie cartésienne.....	51
Figure 19 – Détection de type $BRDF-BTDF$	53
Figure 20 – Procédure de détection en champ lointain.....	53
Figure 21 – Projection des axes de polarisation sur le plan de détection.....	54
Figure 22 – (a) Comparaison des résultats pour (b) une fonction modèle (dHG) en symétrie azimutale.....	56
Figure 23 – Cas particulier d'un milieu atmosphérique.....	57
Figure 24 – Représentation de $\mu \cdot I$ pour un éclairage non polarisé et polarisé rectilignement.....	59

Figure 25 – Taux de dépolarisation (Q/I) en fonction de l'état de polarisation de la luminance incidente.	60
Figure 26 – Comparaison des résultats issus de <i>METROPOL</i> et de <i>MC3D</i> en symétrie azimutale.	61
Figure 27 – Représentation angulaire du vecteur de Stokes diffusé dans les plans $\varphi = 0^\circ$ et $\varphi = 180^\circ$	63
Figure 28 – Représentation angulaire du vecteur de Stokes diffusé dans les plans $\varphi = 90^\circ$	64
Figure 29 – Vecteur de Stokes diffusé pour différents états de polarisation (sans interface).....	66
Figure 30 – Vecteur de Stokes diffusé pour différents états de polarisation (avec interfaces).....	67
Figure 31 – Vecteur de Stokes diffusé pour différents états de polarisation (influence de l'angle d'incidence). .	68
Figure 32 – Modification du vecteur de Stokes en présence d'interfaces en verre.	69
Figure 33 – Modification du vecteur de Stokes en fonction de l'épaisseur optique.....	70
Figure 34 – Etude comportementale en fonction de l'albédo (indice des particules constant).	71
Figure 35 – Etude comportementale avec variation de la partie imaginaire de l'indice des particules.....	72
Figure 36 – Influence de la granulométrie sur la luminance diffusée.	73
Figure 37 – Schéma de principe de l'indentification.....	76
Figure 38 – Fonction de phase non-tronquée, réduction du nombre de coefficients de Legendre.	82
Figure 39 – Fonction de phase tronquée par une méthode de delta-approximation (δM).	83
Figure 40 – Fonction de phase réelle et fonctions modèles ajustées.	85
Figure 41 – <i>BRDF-BTDF</i> non polarisées obtenues à partir de fonctions de phase réelles ou modèles.....	86
Figure 42 – Coefficients de sensibilité en fonction de τ pour un éclairage non polarisé, avec $\omega = 1$ et $r_g = \lambda_0$	92
Figure 43 – Coefficients de sensibilité en fonction de τ pour une polarisation horizontale, avec $\omega = 1$ et $r_g = \lambda_0$	93
Figure 44 – Coefficients de sensibilité en fonction de τ pour une polarisation verticale, avec $\omega = 1$ et $r_g = \lambda_0$	94
Figure 45 – Evolution de la sensibilité à τ en fonction de la valeur de l'albédo.	95
Figure 46 - Coefficients de sensibilité en fonction de ω et de \vec{L}_{inc} avec $\tau = 1$ et $r_g = \lambda_0$	97
Figure 47 – Evolution de $C_s(\omega)$ pour différentes valeurs de l'épaisseur optique.....	98
Figure 48 – Coefficients de sensibilité en fonction de r_g et de \vec{L}_{inc} avec $\tau = 1$ et $\omega = 1$	100
Figure 49 – Evolution de $N_c(\tau)$ avec ou sans τ comme paramètre pour un éclairage incident non polarisé.	101
Figure 50 – Evolution de $N_c(\tau)$ en fonction du domaine angulaire choisi.....	102
Figure 51 – Sensibilité à l'épaisseur optique, hors incidence normale, pour différents plans φ , avec $\omega = 1$ et $r_g = \lambda_0$	105
Figure 52 – Sensibilité à l'albédo, hors incidence normale, pour différents plans φ , avec $\omega = 1$, $\tau = 2$ et $r_g = \lambda_0$	106
Figure 53 – Sensibilité au rayon, hors incidence normale, pour différents plans φ , avec $\omega = 1$, $\tau = 2$ et $r_g = \lambda_0$	107

Figure 54 – Schéma d'optimisation des paramètres.....	109
Figure 55 – Représentation du facteur correctif a_i^1 et correspondance avec les domaines de validité des F_j^1 ..	117
Figure 56 – Evolution de la fonction « objectif » pendant le processus d'optimisation.....	122
Figure 57 – Valeurs de la fonction « objectif » totale pendant le processus d'optimisation.	127
Figure 58 – Vecteurs de Stokes diffusés de référence et retrouvés après identification des paramètres sur la fonctions « objectifs » globales F^1 et F^2	130
Figure 59 – Représentation de la matrice de Mueller pour les trois indices de particules.	135
Figure 60 – Représentations du vecteur de Stokes après optimisation et modification de l'indice des particules.	136
Figure 61 – Représentation de la matrice de Mueller en fonction de la valeur de σ_g	138
Figure 62 – Comparaison des luminances diffusées après optimisation et modification de σ_g	138
Figure 63 – Données bruitées obtenues pour le cas n°1, pour différentes erreurs χ (en %).	140
Figure 64 – Luminances reconstituées après optimisation sur des données bruitées (cas n°1).	141
Figure 65 – Comparaison entre les luminances réelles, bruitées et retrouvées pour $\chi = 5\%$ (cas n°1).	142
Figure 66 - Données bruitées obtenues pour le cas n°2, pour différentes erreurs χ (en %).	143
Figure 67 – Luminances reconstituées après optimisation sur des données bruitées (cas n°2).	144
Figure 68 – Données bruitées obtenues pour le cas n°3.	145
Figure 69 – Luminances retrouvées (cas n°3).	146
Figure 70 – Banc de caractérisation de milieux diffusants, exploitation de la voie polarisée (MELOPEE).	153
Figure 71 – Banc de mesures en optique polarisée, mesures de la diffusion angulaire (MELOPEE).	154
Figure 72 – Banc de mesures en optique polarisée, voie dédiée à la mesure d'extinction (MELOPEE).	154
Figure 73 – Mesure de bruit (électronique et optique).	157
Figure 74 – Principe de mesure en non polarisé.	161
Figure 75 – Caractéristiques de la polarisation après le dépolariseur.	162
Figure 76 – Principe de mesure en polarisation croisée.	163
Figure 77 – Caractéristiques de la polarisation après le polariseur.	165
Figure 78 – Caractéristiques de la polarisation après la lame demi-onde pour a) $\gamma_{DE} = 45^\circ$ et b) $\gamma_{DE} = 135^\circ$.166	
Figure 79 – Caractéristiques de la polarisation après les miroirs de renvoi, avant l'échantillon en a) polarisation verticale <i>i.e.</i> pour $\gamma_{DE} = 0^\circ$ et b) horizontale <i>i.e.</i> pour $\gamma_{DE} = 45^\circ$	167
Figure 80 – Caractéristiques de la polarisation après la cuve à circulation.	168
Figure 81 – Caractéristiques de la polarisation avant la détection : projections selon les axes a) \vec{u}_P et b) \vec{u}_S ..	169
Figure 82 – Réflectance étalonnée (en %) pour le spectralon en fonction de la longueur d'onde d'éclairement.171	
Figure 83 – a) Comparaison entre les données mesurées et les données simulées, b) détermination de la constante d'étalonnage $Cte_{NP,NP}(\mu)$	178
Figure 84 – a-b) Comparaison entre les données mesurées et les données simulées pour un éclairage non polarisé, c-d) détermination des constantes d'étalonnage $Cte_{NP,P}(\mu)$ et $Cte_{NP,S}(\mu)$	180

Figure 85 – a-b) Comparaison entre les données mesurées et les données simulées pour un éclairage incident vertical, c-d) première détermination des constantes d'étalonnage $Cte_{P,P}(\mu)$ et $Cte_{P,S}(\mu)$	183
Figure 86 – a-b) Nouvelle détermination des constantes d'étalonnage $Cte_{P,S}(\mu)$	184
Figure 87 – a-b) Comparaison entre les données mesurées et les données simulées pour un éclairage horizontal, c-d) détermination des constantes d'étalonnage $Cte_{S,P}(\mu)$ et $Cte_{S,S}(\mu)$	185
Figure 88 – Principe de la mesure d'extinction.....	187
Figure 89 – Courbes de comparaison entre les épaisseurs optiques mesurées et théoriques.....	188
Figure 90 – Validation expérimentale de l'additivité des polarisations sur la $BRDF-BTDF$ et comparaison avec les données simulées.....	190
Figure 91 – Premier cas d'étude : comparaison des $BRDF-BTDF$ et du taux de dépolarisation simulés, mesurés et retrouvés après identification des paramètres.....	193
Figure 92 – Deuxième cas d'étude : comparaison des $BRDF-BTDF$ et du taux de dépolarisation simulés, mesurés et retrouvés après identification des paramètres (cas des particules de latex + cuves plates).....	194
Figure 93 – Deuxième cas d'étude : comparaison des $BRDF-BTDF$ et du taux de dépolarisation simulés, mesurés et retrouvés après identification des paramètres (cas du spectralon).....	195
Figure 94 – Représentations de sphéroïdes et de cylindres.....	205
Figure 95 – Réflexion et réfraction à une interface plane.....	207
Figure 96 – Présence du cône de réfraction au passage d'une interface.....	209
Figure 97 – Evolution du taux de transmission des polariseurs en fonction de la longueur d'onde.....	212
Figure 98 – Relations de transmission en polarisation croisée.....	213
Figure 99 – Vérification expérimentale de la valeur de l'angle de collection.....	214
Figure 100 – Linéarité de la réponse du détecteur en fonction de la puissance du laser avec a) $D = 1$ et b) $D = 3$	216
Figure 101 – Représentation des fonctions de correction et du rapport entre les puissances collimatée et diffusée.....	218
Figure 102 – Représentation du rapport entre le signal mesuré et le bruit.....	219
Figure 103 – Erreur relative sur l'épaisseur optique mesurée.....	219
Figure 104 – (a) Représentation de la cuve cylindrique dans le repère absolu $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et (b) vue en coupe.....	220
Figure 105 – Schéma de principe du code Monte Carlo 3D en géométrie cylindrique.....	222
Figure 106 – Géométrie utilisée pour calculer les coordonnées de $\vec{M}_{interface}$	223
Figure 107 – (a) Définition générale du repère local $(M_{interface}, \vec{e}_n, \vec{e}_z)$ et du repère absolu $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, (b) Géométrie du passage à une interface (projection 2D).....	224
Figure 108 – Réflexions multiples dans l'épaisseur d'une cuve cylindrique (représentation 2D).....	225
Figure 109 – Comparaison des distances R_i et R_c en projection dans le plan $(\vec{e}_x, 0, \vec{e}_y)$ pour une cuve cylindrique, (a) procédures de mesures par maillage de l'espace et (b) de mesures en champ lointain.....	226
Figure 110 – Cuves cylindriques a) sans méplat ou b) avec méplat pour corriger les effets de focalisation du laser.....	227

Figure 111 – Banc de mesures en optique polarisée, mesures de la diffusion angulaire (MELOPEE).....	228
Figure 112 – Modulateur électro-optique : alignement du cristal.	229
Figure 113 – Principe de mesure en polarisation modulée.....	230

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 – Valeurs des paramètres de la fonction modèle non polarisée.....	55
Tableau 2 – Particules de latex dans une cuve plate (indices).....	58
Tableau 3 – Détermination des albédos en fonction de la partie imaginaire des indices des particules.....	71
Tableau 4 – Paramètres des fonctions modèles pour des particules de latex de rayon $r_g = \lambda$	85
Tableau 5 – Domaines angulaires d'intérêt pour chaque paramètre en éclairage non-polarisé.	103
Tableau 6 – Optimisation sur l'albédo pour une épaisseur optique et une granulométrie données.....	121
Tableau 7 – Optimisation sur l'épaisseur optique pour un albédo et une granulométrie donnés.	122
Tableau 8 – Optimisation sur la granulométrie pour un albédo et une épaisseur optique donnés.....	123
Tableau 9 – Optimisation sur l'albédo et la granulométrie par méthode des gradients conjugués.....	125
Tableau 10 – Optimisation sur l'albédo et la granulométrie par méthode de quasi-Newton.	126
Tableau 11 – Optimisation sur les trois paramètres à partir de la fonction « objectif » globale F^1	128
Tableau 12 – Optimisation sur les trois paramètres (quasi-Newton) et changement de la fonction « objectif ». 129	
Tableau 13 – Optimisation sur les trois paramètres avec changement des coefficients de pondération.	131
Tableau 14 – Optimisation sur ω et r_g avec une incertitude de -5, -10, +5 ou +10 % sur la valeur de τ	132
Tableau 15 – Optimisation sur ω et r_g (incertitude de -5 % sur τ et modification des conditions initiales). .	133
Tableau 16 – Identification des trois paramètres pour des milieux optiquement denses.....	134
Tableau 17 – Optimisation sur les trois paramètres (quasi-Newton) lorsque l'indice des particules est erroné. 135	
Tableau 18 – Optimisation sur les trois paramètres (quasi-Newton) avec modification de la loi de distribution en taille des particules	137
Tableau 19 – Identification des trois paramètres à partir de données bruitées (cas n°1).....	140
Tableau 20 – Identification des trois paramètres à partir de données bruitées (cas n°2).....	144
Tableau 21 – Identification des trois paramètres (cas n°3).	146
Tableau 22 – Caractéristiques du système de filtrage.	160
Tableau 23 – Relations entre le vecteur de Stokes simulé et les éléments de la matrice de diffusion.	173
Tableau 24 – Premier cas d'étude : paramètres retrouvés après optimisation à partir des données corrigées par les fonctions d'appareil liées aux particules de latex.....	191

Tableau 25 – Premier cas d'étude : paramètres retrouvés après optimisation à partir des données corrigées par les fonctions d'appareil liées au spectralon.	192
Tableau 26 – Deuxième cas d'étude : paramètres retrouvés après optimisation à partir des données corrigées par les fonctions d'appareil liées aux particules de latex.	194
Tableau 27 – Deuxième cas d'étude : paramètres retrouvés après optimisation à partir des données corrigées par les fonctions d'appareil liées au spectralon.....	195
Tableau 28 – Principales caractéristiques du laser Nd:Yag (données constructeur).	211
Tableau 29 – Caractéristiques principales des cuves à faces parallèles.	213
Tableau 30 – Caractéristiques de la lentille et de son montage.....	214
Tableau 31 – Caractéristiques du détecteur <i>DET-90</i>	215
Tableau 32 – Influence des optiques sur la puissance laser (avant l'échantillon).	217
Tableau 33 – Caractéristiques du système de mesure.	218
Tableau 34 – Principales caractéristiques du modulateur électro-optique.	228
Tableau 35 – Détermination des éléments de la matrice de Mueller.....	233

GLOSSAIRE

• Notions sur les ondes électromagnétiques

\vec{E}, \vec{B}	Vecteurs champs électrique et magnétique
\vec{k}	Vecteur d'onde (unitaire)
\vec{u}	Vecteur unitaire
λ	Longueur d'onde [m]
n	Indice de réfraction du milieu [sans dimension]
f	Fréquence [Hz]
ω	Pulsation [$\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$]
$\varphi_0 = \varphi_S - \varphi_P$	Déphasage de l'onde entre les deux directions de polarisation [$^\circ$]

• Notions sur la polarisation

$\vec{S} = (I, Q, U, V)^T$	Vecteur de Stokes [sans dimension]
\mathbf{M}	Matrice de Mueller [sans dimension]
DOP	Degré de polarisation (<i>Degree Of Polarization</i>) [sans dimension]
$DOLP$	Degré de polarisation linéaire (<i>Degree Of Linear Polarization</i>) [sans dimension]
$DOCP$	Degré de polarisation circulaire (<i>Degree Of Circular Polarization</i>) [sans dimension]

• Notions sur la géométrie du système

\vec{n}	Normale (vecteur unitaire)
\vec{s}	Direction (vecteur unitaire)
Θ	Angle de diffusion [$^\circ$]
θ	Angle polaire zénithal entre la direction de propagation et la normale [$^\circ$]
φ	Angle azimutal [$^\circ$]
μ	Cosinus de l'angle zénithal ($\mu = \cos \theta$) [sans dimension]
$d\varpi$	Angle solide élémentaire, mesuré sur une sphère unité Ω [sr^{-1}]
dV	Volume élémentaire [m^3]
dS	Surface élémentaire [m^2]
$\sigma_{1,2}$	Angles de rotation des axes de polarisation lors du processus de diffusion [$^\circ$]
$\mathbf{L}(\sigma_{1,2})$	Matrice de rotation des axes de polarisation [sans dimension]
$\vec{M} = (x, y, z)$	Position d'un photon en géométrie cartésienne [m]
R_i	Distance séparant un photon de la plus proche interface [m]
R_c	Distance séparant un photon de la plus proche collision avec une particule [m]

- **Notions sur les particules et le milieu hôte**

n_{ext}	Indice de réfraction extérieur au milieu hôte [sans dimension]
n_i	Indice de réfraction complexe de la $i^{\text{ème}}$ couche [sans dimension]
$\rho(r)$	Distribution en taille (granulométrie) [sans dimension]
r	Rayon de la particule [m]
r_g	Rayon moyen [m]
σ_g	Ecart type de la distribution [sans dimension]
r_{eff}	Rayon effectif [m]
v_{eff}	Variance effective [sans dimension]

- **Notions sur les paramètres radiatifs**

σ_γ	Sections efficaces de diffusion, d'absorption ou d'extinction ($\gamma = dif, abs, ext$) [m ²]
σ_{geom}	Section géométrique d'une particule [m ²]
Q_γ	Efficacité [sans dimension]
$k_\gamma(\lambda)$	Coefficients de diffusion, d'absorption ou d'extinction monochromatiques [m ⁻¹]
$\mathbf{k}_\gamma(\vec{x})$	Matrice des coefficients de diffusion, d'absorption ou d'extinction monochromatiques [m ⁻¹]
$\omega(\lambda)$	Albédo monochromatique [sans dimension]
τ_λ	Epaisseur optique [sans dimension]
$p_\gamma(\theta_0, \varphi_0, \theta, \varphi)$	Fonction de phase [sans dimension]
$\mathbf{P}(\vec{x}, \vec{s}, \vec{s}')$	Matrice de diffusion globale [sans dimension]

- **Notions sur les données thermo-optiques**

$\bar{L}^0(T)$	Luminance totale non polarisée du corps noir [W.m ⁻² .sr ⁻¹]
T	Température [K]
σ	Constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8}$ W.m ⁻² .K ⁻⁴)
$BRDF - BTDF$	Réflectivité monochromatique bidirectionnelle (<i>Bidirectional Reflectance Distribution Function</i>) et transmittivité monochromatique bidirectionnelle (<i>Bidirectional Transmittance Distribution Function</i>) [sr ⁻¹]
Q/I	Tau de (dé)polarisation [sans dimension]
$\bar{E}_i(z_i, \theta_i, \varphi_i)$	Eclairement [W.m ⁻²]
d^2P	Flux lumineux [W]
F_{ext}	Flux incident externe [W]
$I(z, \theta, \varphi)$	Intensité [W.sr ⁻¹]
$\bar{L}_i(z_i, \theta_i, \varphi_i), \bar{L}$	Luminance incidente ou diffusée [W.m ⁻² .sr ⁻¹]
$\bar{\sigma}_T, \bar{\sigma}_{col}$	Termes de sources thermiques et collimatées [W.m ⁻² .sr ⁻¹]

- **Notions sur le passage des interfaces (Fresnel)**

\mathbf{t}	Matrice des coefficients de réflexion de Fresnel [sans dimension]
\mathbf{r}	Matrice des coefficients de transmission de Fresnel [sans dimension]
$\mathbf{T}(i)$	Matrice de transmission globale de la $i^{\text{ème}}$ couche [sans dimension]
$\mathbf{R}(i)$	Matrice de réflexion globale de la $i^{\text{ème}}$ couche [sans dimension]
$\mathbf{\Gamma}(i)$	Matrice de cohérence de la $i^{\text{ème}}$ couche [sans dimension]

- **Notions sur les troncatures numériques et l'étude de sensibilité**

χ_k	Coefficients d'expansion dans la décomposition en polynômes de Legendre de la fonction de phase [sans dimension]
f	Coefficient de troncature [sans dimension]
g	Coefficient d'asymétrie de la fonction de phase [sans dimension]
N_{gauss}	Nombre de points dans la quadrature de Gauss [sans dimension]
ρ	Poids associés aux directions μ de la quadrature [sans dimension]
\mathbf{C}	Matrice de sensibilité [sans dimension]
$N_c(\mathbf{C})$	Nombre de conditionnement [sans dimension]
$C_s(\mu)$	Coefficients de sensibilité [sans dimension]

- **Notions sur les méthodes d'optimisation**

$\vec{x}, \vec{\beta}$	Jeux de paramètres à optimiser
$F_i(\vec{x})$	Fonction « objectif » ou fonction de coût
λ_k	Paramètre de descente
d_k	Vecteur de descente
$g_k = \nabla F(x_k)$	Gradient de la fonction F pour le $k^{\text{ième}}$ paramètre
α_k	Facteurs de correction de la fonction « objectif » globale

- **Notions sur les données expérimentales**

D_{diffr}	Diamètre de la tâche de diffraction [m]
θ_{filtre}	Angle de collection du filtre [°]
P	Puissance mesurée par le détecteur non polarisé [W]
$\Delta\Omega_{collection}$	Angle solide de collection [sr ⁻¹]
Cte_{XY}	Constante d'étalonnage avec un éclairage incident polarisé en X et une détection selon l'état de polarisation Y [sans dimension]
DO	Densité optique [sans dimension]

- **Notations et indexations adoptées (avec X une variable quelconque)**

X_{sim}, X_{ref}	Données simulées et de référence
X^{tr}	Variable tronquée
X_{int}	Variable relative à une interface
X_{ext}	Variable relative au milieu extérieur
X_c	Variable relative au collimaté
X_d	Variable relative au diffus
X^+	Contribution « descendante » de X i.e. dans le sens des $\mu > 0$
X^-	Contribution « montante » de X i.e. dans le sens des $\mu < 0$
X_m^c	Décomposition de X dans l'espace de Fourier en <i>cosinus</i> , à l'ordre m
X_m^s	Décomposition de X dans l'espace de Fourier en <i>sinus</i> , à l'ordre m

INTRODUCTION

- **Contexte général**

Les applications de l'étude des propriétés optiques des milieux diffusants sont nombreuses et variées. Dans bon nombre d'entre elles, l'information polarimétrique est de plus en plus souvent utilisée.

En télédétection ou en climatologie, la prise en compte de l'atmosphère et de ses propriétés radiatives est indispensable. Dans le premier cas, il s'agit par exemple de corriger le signal détecté par la diffusion éventuelle de la lumière solaire par les aérosols^{[02][03]}. Dans le deuxième cas, on peut citer la modélisation des cristaux de glace dans les nuages qui permet, entre autre, de mieux appréhender l'évolution du temps et de mieux comprendre les changements climatiques. De nos jours, l'emploi de lidar ou de radar polarisés permet en effet d'accéder au contenu microphysique d'un système précipitant et/ou diffusant, c'est-à-dire à la nature et à la quantité d'hydrométéores (pluie, neige, cristaux de glace, grêle) qu'il contient. Ces travaux prennent en compte l'état de la polarisation des ondes rétrodiffusées et considèrent leur évolution temporelle^[06].

Les astronomes s'inspirent des méthodes développées en météorologie pour simuler l'atmosphère de certaines planètes ou satellites de notre système solaire (cf. Titan^[08]). L'étude comportementale des nuages de poussière dans l'Univers permet de mieux comprendre la formation d'amas d'étoiles et la naissance de ces astres. Là encore, l'analyse des signaux diffusés polarisés (*Zero Branch*) est une source importante d'information sur la nature du nuage de poussière^[09].

Dans un domaine similaire, la diffusion de la lumière par un écoulement diphasique issu par exemple d'une chambre à combustion^[10], fournit de nombreux renseignements sur la qualité de la combustion en permettant de retrouver les paramètres microphysiques tels que la taille des particules.

En imagerie biomédicale, des recherches sont conduites pour détecter les tumeurs cancéreuses ou pour comprendre les mécanismes de la coagulation du sang^[01]. Dans ce cas, l'état de la polarisation en réflexion est souvent utilisé. De même, l'imagerie active traitant des données polarimétriques est également un domaine en pleine expansion^{[04][05][07]}.

A une autre échelle, la préoccupation principale des industriels de la peinture est de limiter la quantité de pigments mis en solution, tout en conservant les propriétés optiques de ces milieux denses. On pourra aussi citer un certain nombre de travaux concernant l'étude de revêtements et de matériaux constitués d'arrangements de couches successives de particules diffusantes ou absorbantes.

Pour toutes ces applications, les problématiques scientifiques influençant les propriétés optiques des milieux diffusants sont nombreuses. Nous avons ici choisi de nous focaliser sur la caractérisation de milieux diffusants denses (et particulièrement les revêtements ou peintures) par une approche basée sur l'analyse de la diffusion polarisée. Cette caractérisation vise essentiellement à améliorer les capacités de diagnostics optiques de tels milieux afin de remonter aux propriétés microphysiques ou aux paramètres radiatifs. En effet, les méthodes classiques de diagnostic sont souvent limitées à des milieux optiquement minces. En corollaire, les paramètres radiatifs obtenus sont utiles à la compréhension de phénomènes tels que la diffusion dépendante dans des milieux denses pouvant être absorbants.

- **Etat de l'art**

Modélisation des propriétés optiques polarisées

L'évolution des propriétés optiques dans les milieux diffusants de type revêtement est une combinaison de la diffusion volumique, de la diffusion surfacique et de l'absorption. En général, deux approches sont adoptées pour les modéliser :

- l'approche électromagnétique est une méthode exacte mais qui nécessite des temps de calcul trop importants (cf. méthode des Moments^[11], FDTD^[12]...);
- le transfert radiatif est une méthode phénoménologique approchée dont les temps de calcul sont plus rapides (cf. méthode des ordonnées discrètes^[13] ou méthode d'*adding-doubling*^[14]).

Dans ce manuscrit, nous avons choisi une approche radiative. Les hypothèses faites pour développer cette méthode peuvent être en partie levées grâce aux nombreux travaux actuels pour prendre en compte sur les paramètres radiatifs les effets de la diffusion multiple dépendante et cohérente^{[15][16][17]}, de l'absorption dans le liant^[18] et introduire aux frontières du milieu le couplage des diffusions de surface et de volume de manière incohérente^[18].

La prise en compte de la polarisation est effective depuis de nombreuses années dans l'approche radiative mais l'éclairement incident est la plupart du temps non polarisé. Ainsi, Evans et Stephens^[19] considèrent un éclairement solaire (non polarisé) et un milieu sans changement d'indice (*i.e.* l'atmosphère). Comme nous le verrons plus loin, leur méthode de résolution de l'équation du transfert radiatif par une méthode d'*adding-doubling* présente de nombreux avantages. Ces travaux ont été adaptés pour une polarisation incidente linéaire et pour prendre en compte les effets de réflexions multiples qui interviennent lorsque l'indice du milieu change.

Détermination des paramètres radiatifs

La prédiction des propriétés radiatives de milieux diffusants dilués tels que les jets, les aérosols ou les nuages, ainsi que la détermination de la diffusion angulaire (*BRDF-BTDF*) pour des milieux diffusants denses dans une large bande spectrale, requièrent toutes les deux une bonne estimation de paramètres microphysiques comme la granulométrie.

Dans les milieux dilués, les méthodes conventionnelles d'estimation de ce paramètre^{[20][21]}, basées sur la diffusion simple de Mie, peuvent être perturbées par la non sphéricité des diffuseurs et par la diffusion multiple. Dans le cas des milieux denses, seuls des paramètres plus macroscopiques tels les paramètres radiatifs peuvent être obtenus à partir de jeux de données de diffusion multiple non polarisée^[30]. De surcroît, cette obtention est mal conditionnée si l'épaisseur optique est indéterminée. D'autre part, la granulométrie du milieu issue de la seule fonction de phase de Mie optimisée sur le milieu ne permet pas de prédire, pour les raisons précédemment évoquées, les propriétés radiatives à d'autres longueurs d'onde.

Dans les deux cas, la diffusion polarisée, sensible à la non sphéricité des particules et à la diffusion multiple (*i.e.* à l'épaisseur optique), est porteuse d'information pouvant favoriser la caractérisation de milieux diffusants. Notre étude vise à introduire des données polarisées dans une démarche d'identification des paramètres pour retrouver l'épaisseur optique, l'albédo et la matrice de Mueller caractérisant le milieu. Cette démarche s'appuie sur des méthodes récursives existantes telles que les gradients conjugués^[31] ou de type quasi-Newton^[32].

- **Présentation des travaux**

L'objectif de ce travail de thèse est donc de modéliser dans un premier temps le transfert radiatif polarisé dans un milieu multicouche avec changement de l'indice de réfraction. Puis, nous développons les outils numériques nécessaires à l'identification des paramètres radiatifs d'intérêt à partir de données issues de la diffusion polarisée. Enfin, un moyen expérimental spécialement dédié à cette étude de la diffusion polarisée est développé et permet de valider le concept.

Le premier chapitre de ce mémoire introduit quelques notions élémentaires sur les milieux diffusants. Le formalisme de Stokes est choisi pour modéliser le transfert radiatif polarisé dans ce type de milieux. Cette notation matricielle est simple à mettre en œuvre numériquement. Contrairement au formalisme de Jones, l'état de la polarisation représenté sous forme vectorielle peut être quelconque (sans modification préalable par des matrices de cohérence). Les milieux traversés sont également décrits avec le même formalisme. Dans une deuxième partie de ce même chapitre, nous introduisons les paramètres radiatifs qui caractérisent un milieu diffusant et les données thermo-optiques mesurables (*BRDF-BTDF* polarisées).

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation du transfert radiatif polarisé dans les milieux hétérogènes. Nos travaux nous ont conduits à développer deux approches spécifiques. La première méthode est déterministe et résout l'équation du transfert radiatif polarisé (ETRP) en géométrie unidimensionnelle. En nous inspirant des travaux existants dans le domaine atmosphérique, la méthode d'*adding-doubling* est étendue à une succession de

couches homogènes dont les indices optiques peuvent être différents. La prise en compte d'une source polarisée et l'analyse de la diffusion polarisée dans le formalisme de Stokes en tout point du milieu sont les principales améliorations que nous avons apportées à ce modèle. Il est donc possible de modéliser un milieu atmosphérique (avec prise en compte du sol et des sources thermiques dans chaque couche) ou des matériaux semi-transparents (liquides, gazeux ou solides).

La deuxième approche choisie permet de résoudre de façon stochastique l'ETRP quelle que soit la géométrie du système considérée. L'objectif de ce modèle Monte Carlo 3D est de valider les concepts mis en jeu et de générer des données polarisées de référence. A terme, il doit permettre l'étude des fonctions d'appareil expérimentales en géométrie cylindrique et sera étendu à la gestion temporelle de la diffusion polarisée.

Dans ce même chapitre, nous abordons la validation et l'intercomparaison des deux outils numériques développés. La validation porte tout d'abord sur des données de référence issues de la littérature puis l'intercomparaison est faite sur des milieux semi-infinis plus complexes (prise en compte du changement d'indice). Enfin, une étude comportementale de la diffusion polarisée conclut ce chapitre.

Le troisième chapitre est dédié à l'identification des paramètres radiatifs par optimisation de données expérimentales polarisées. Les travaux actuels dans ce domaine montrent qu'il est possible de retrouver certains paramètres d'intérêt tels que l'albédo, la matrice de Mueller ou l'épaisseur optique. Les problèmes de non-unicité des solutions lors de l'inversion des données non polarisées conduisent à déterminer le plus souvent l'épaisseur optique indépendamment des autres paramètres. Dans cette étude, nous proposons de travailler sur l'ensemble des paramètres en exploitant la diffusion polarisée par ces mêmes milieux.

Une paramétrisation du modèle unidimensionnel est réalisée afin de réduire le nombre de paramètres nécessaires pour modéliser une couche diffusante. Un effort est consacré à la représentation de la matrice de Mueller. Diverses solutions sont envisagées comme la représentation par des fonctions modèles telles que des combinaisons de fonctions d'Henry Greenstein, la décomposition dans une base de Legendre en appliquant une troncature sur les différentes fonctions pour limiter le degré du polynôme.

Une étude de sensibilité est ensuite réalisée sur divers milieux contenant des particules de granulométrie. Nous mettons alors en évidence que les données polarisées sont plus ou moins sensibles à un paramètre d'intérêt en fonction du domaine angulaire considéré. Notre démarche vise à s'affranchir des problèmes de dépendance entre les paramètres et d'unicité des solutions qui existent si l'on considère l'ensemble des angles de diffusion.

L'identification de l'épaisseur optique, de l'albédo et des paramètres décrivant la matrice de Mueller est réalisée de manière récursive et couplée à des méthodes d'optimisation de type Quasi-Newton. Les fonctions « objectifs » à minimiser sont déduites de l'étude de sensibilité. La granulométrie est retrouvée à partir de matrices de Mueller équivalentes à celles données pour des particules sphériques. Une validation numérique est mise en place pour tester la bonne convergence de cette méthode vers des solutions réelles.

Le quatrième chapitre décrit le moyen expérimental spécifiquement développé pour acquérir les données polarisées de milieux de référence. L'approche retenue est conventionnelle et s'appuie sur des optiques classiques, à savoir des lames de retard et des dépolariseurs. La mesure en polarisation croisée fournit les données d'entrée utiles à la méthode d'identification développée. Une dernière voie mesure directement l'épaisseur optique par extinction du faisceau laser. Le calibrage en polarisation et l'étalonnage du moyen sont

ensuite abordés. La détermination des fonctions d'appareil permet de relier les données mesurées aux données simulées en les corrigeant des effets angulaires. Après en avoir vérifié la véracité, ces fonctions d'appareil sont ensuite utilisées pour mesurer des données de référence à optimiser. Les paramètres retrouvés sont alors comparés aux valeurs théoriques : par exemple, aux mesures de l'épaisseur optique sur la voie d'extinction (ou à son calcul formel), à la granulométrie donnée par le fabricant. Cette partie constitue une première validation du concept proposé et développé dans les chapitres précédents. L'extension de cette validation à d'autres milieux de référence ou à des milieux réels est ensuite envisagée.

CHAPITRE I :

NOTIONS SUR LES MILIEUX DIFFUSANTS

1 INTRODUCTION

La présence d'inclusions de taille équivalente à la longueur d'onde ou d'inhomogénéités de l'indice optique dans un milieu peut entraîner localement la diffusion de la lumière incidente dans toutes les directions. Ces phénomènes de diffusion de la lumière expliquent de nombreux phénomènes naturels : la diffusion moléculaire de Rayleigh permet d'expliquer la couleur bleue du ciel, la couleur blanche des nuages est une caractéristique d'une diffusion de Mie spectralement homogène. Les phénomènes de diffusion sont parfois couplés avec la notion d'absorption (par exemple, les gaz de l'atmosphère). Il est important de noter que les applications de la diffusion de la lumière dans les milieux solides sont également nombreuses, par exemple dans les tissus biologiques ou les matériaux tels que les peintures. C'est dans ce cadre que se placera essentiellement notre étude.

Les phénomènes de diffusion multiple peuvent être décrits simplement à partir de l'équation de transfert radiatif (ETR) qui résulte d'une approche phénoménologique macroscopique mais dont la validité s'appuie aujourd'hui sur des approches électromagnétiques^[33]. Cette équation phénoménologique possède une forme vectorielle (VRTE : *Vector Radiative-Transfer Equation*) plus générale que la forme scalaire (non polarisée). Elle permet de traiter le cas de la diffusion polarisée. Par abus de langage, nous adopterons les termes « polarisé » ou ETRP (Equation de Transfert Radiatif Polarisé) pour considérer ce formalisme.

La résolution de cette équation vectorielle requiert un certain nombre de notions fondamentales que nous allons introduire dans ce chapitre. Dans un premier temps, les principes généraux liés à la description de la polarisation de la lumière sont présentés. Dans une deuxième partie, nous aborderons les grandeurs caractéristiques d'un milieu diffusant en considérant les aspects polarisés : la notion de paramètres radiatifs sera d'abord introduite puis nous présenterons les données thermo-optiques polarisées mesurables sur un milieu diffusant.

2 NOTIONS SUR LA POLARISATION DE LA LUMIERE

Ce paragraphe présente succinctement la nature électromagnétique de la lumière et l'origine de la polarisation. Nous introduirons le formalisme de Stokes qui a été adopté pour décrire les différents états de polarisation de la lumière.

2.1 POLARISATION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE PLANE

Considérons un faisceau parallèle de lumière et modélisons-le par une onde électromagnétique plane. Le champ électrique \vec{E} est couplé au champ magnétique \vec{B} selon le principe de la Figure 1 : on parle d'ondes planes transverses puisque \vec{E} et \vec{B} sont dans le plan perpendiculaire au sens de propagation. L'étude des ondes planes est identique quel que soit le champ considéré : par la suite, nous considérons uniquement le champ \vec{E} . La même démarche s'applique au champ \vec{B} .

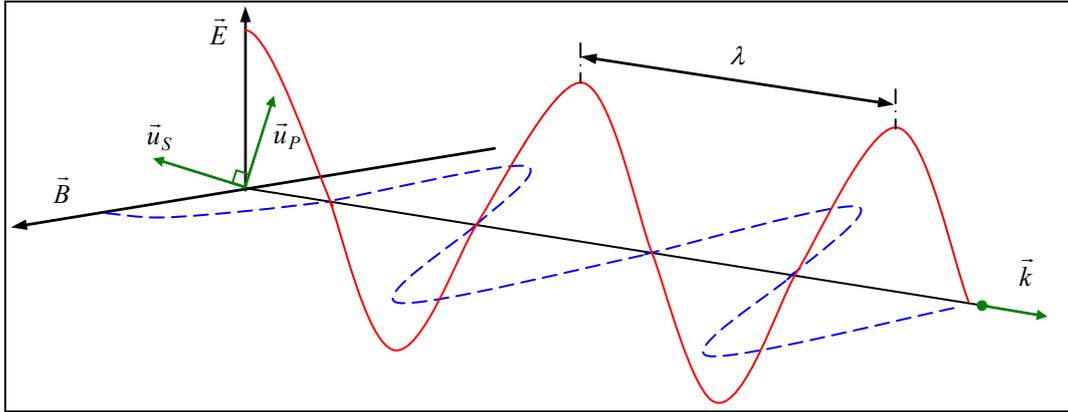


Figure 1 – Onde électromagnétique plane.

Le vecteur d'onde \vec{k} , parallèle à la direction du rayon lumineux et orienté dans le sens de propagation, caractérise l'onde plane. La constante de propagation est liée à la longueur d'onde λ et est définie telle que :

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \quad \text{où } n \text{ est l'indice optique du milieu} \quad \text{Eq. 1}$$

Cette grandeur est complexe si le milieu est à pertes. Définissons par \vec{u}_k le vecteur unitaire tel que $\vec{u}_k = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$.

Dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, les directions de polarisation sont données par les vecteurs suivants (cf. Figure 1) :

$$\vec{u}_P \quad \text{et} \quad \vec{u}_S = \vec{u}_k \times \vec{u}_P \quad \text{Eq. 2}$$

L'onde peut être polarisée uniquement dans la direction de polarisation parallèle P (*parallele*), le champ électrique parallèle à \vec{u}_S est alors nul : on parle d'onde transverse magnétique (TM). L'onde peut également être polarisée perpendiculairement (*senkrecht*) en S : le champ de l'onde transverse électrique (TE, champ électrique parallèle à \vec{u}_P) est nul. En général la polarisation est quelconque : l'onde est à la fois polarisée en S et en P . Le champ électrique d'une onde électromagnétique tient compte du déphasage entre les champs définis pour les deux directions de polarisation :

$$\vec{E} = \vec{E}_P + \vec{E}_S = e^{i(\omega t - |\vec{k}|z + \varphi_P)} \cdot (E_P \cdot \vec{u}_P + E_S \cdot e^{i(\varphi_S - \varphi_P)} \cdot \vec{u}_S) \quad \text{Eq. 3}$$

Dans l'Eq. 3, E_P et E_S représentent les amplitudes des champs électriques, φ_P et φ_S sont les déphasages et ω la pulsation de l'onde ($\omega = 2\pi f$ avec f la fréquence). Seules les parties réelles des exponentielles ont une réalité physique. Cette formulation du champ \vec{E} reste valable quel que soit l'indice du milieu (avec ou sans partie imaginaire). Les dépendances temporelle et spatiale de la première exponentielle sont parfois omises de telle sorte que l'équation précédente se simplifie en :

$$\vec{E} = E_P \cdot \vec{u}_P + E_S \cdot e^{i\varphi_0} \cdot \vec{u}_S \quad \text{Eq. 4}$$

L'état de polarisation d'une onde plane est parfaitement déterminé si les amplitudes (E_S , E_P) et le déphasage $\varphi_0 = \varphi_S - \varphi_P$ entre les deux directions sont connus. Toutefois, le concept d'onde plane est insuffisant pour expliquer certains aspects physiques et comportements de la lumière polarisée. Le rayonnement lumineux émis par une source est associé à la notion de « trains d'onde ». L'état de polarisation est parfaitement déterminé pendant une durée très brève $\Delta\tau$ où l'on retrouve les conditions d'une onde électromagnétique plane. Pour une lampe à vapeur de mercure, $\Delta\tau$ est d'environ 10^{-12} seconde. Cette durée est plus longue ($\sim 10^{-5}$ seconde) pour certains lasers stabilisés. Au-delà de $\Delta\tau$, un nouveau train d'onde est émis avec une phase et une polarisation différentes. Ces variations ne sont pas accessibles par les appareils de détection actuels qui moyennent les signaux sur un temps d'intégration beaucoup plus important. Van de Hulst^[35] a montré que les seules quantités liées à la polarisation de la lumière et accessibles expérimentalement quelle que soit la méthode de mesure (détecteur, polariseur, interféromètre...) sont les moyennes suivantes :

$$\begin{aligned} I_P &= \langle E_P^2 \rangle & U &= \langle 2E_S E_P \cos \varphi_0 \rangle \\ I_S &= \langle E_S^2 \rangle & V &= \langle 2E_S E_P \sin \varphi_0 \rangle \end{aligned} \quad \text{Eq. 5}$$

Plusieurs notations peuvent être employées pour exprimer les mêmes grandeurs. Ainsi I_P est parfois notée I_V (réciproquement, I_H pour I_S). Nous choisissons de conserver les notations P et S tout le long de notre étude.

2.2 FORMALISMES UTILISES POUR REPRESENTER LA POLARISATION DE LA LUMIERE

Différents formalismes permettent de représenter les états de polarisation de la lumière. Ces derniers sont parfois caractérisés par des nombres complexes : c'est le cas de la représentation trigonométrique, de Jones ou a fortiori de la représentation complexe évoquée précédemment^[36].

La représentation mathématique la plus simple de l'état de polarisation est celle d'un vecteur $\vec{V} = (I_P, I_S)^T$ à deux composantes complexes appelé vecteur de **Jones**. Dans ce formalisme, l'évolution d'un état de polarisation dans un système optique est décrite par une matrice de transfert **J** dite matrice de Jones (matrice complexe de dimension 2x2). Lorsque la lumière est totalement polarisée, la représentation de Jones est parfaitement adaptée. Par contre, il faut faire intervenir la matrice de cohérence dans le cas de lumière partiellement polarisée. Pour s'affranchir de ces calculs supplémentaires et conserver une écriture valable quelle que soit la polarisation, on adopte le formalisme de **Stokes**^[37]. Le formalisme de Stokes fait appel à des grandeurs relatives aux intensités des champs définis dans l'Eq. 5, c'est à dire les quantités directement mesurables.

Un état de polarisation peut être représenté par les paramètres issus de la Figure 2 et caractérisé par son ellipticité décrite par l'angle ε et l'inclinaison du grand axe de l'ellipse décrit par l'angle α .

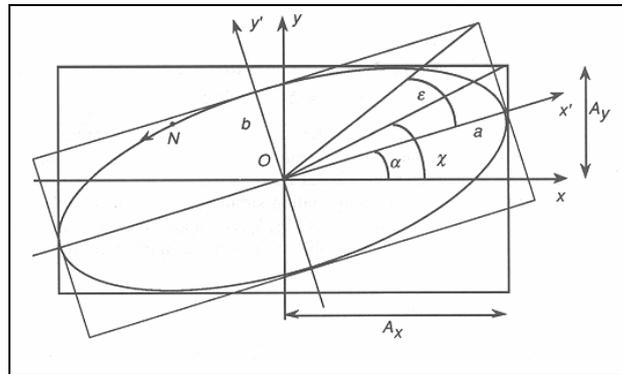


Figure 2 – Polarisation elliptique.

La sphère de Poincaré est une autre représentation sphérique facile à mettre en œuvre. Elle met en jeu les angles 2α et 2ε définis précédemment. Le vecteur polarisation \vec{P} apparaît comme étant le rayon vecteur définissant un point M appartenant à la sphère de rayon unité. La Figure 3 décrit les différents états de polarisation.

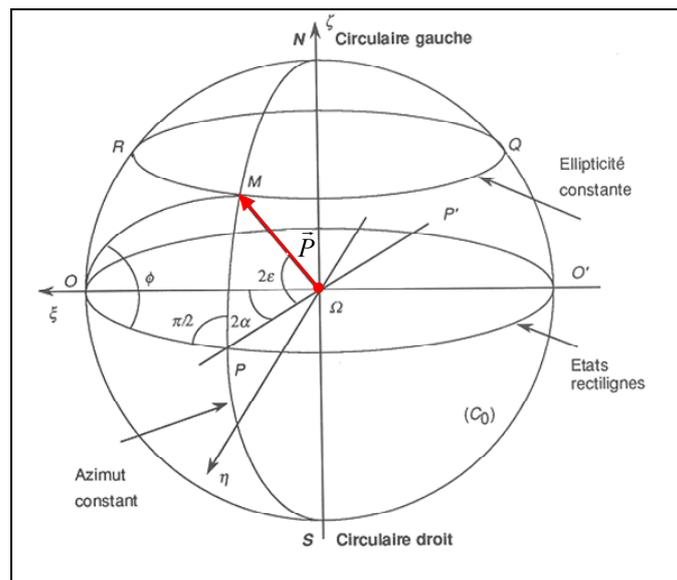


Figure 3 – Sphère de Poincaré.

On remarquera que chaque parallèle de la sphère correspond à des états de polarisation d'ellipticité fixe (ε constant) et que chaque méridien représente des états dont l'azimut est fixe (α constant). La polarisation est dite rectiligne lorsque $\varepsilon = 0$, $\forall \alpha$: l'ellipticité est nulle pour tous les points appartenant à l'équateur de la sphère. On parle d'état circulaire droit quand $2\varepsilon = -\pi/2$, $\forall \alpha$ (respectivement, circulaire gauche si $2\varepsilon = \pi/2$) : dans ce cas, l'ellipticité est égale à ± 1 . Pour tout autre point M qui n'est pas situé sur l'équateur ou aux pôles de la sphère, son état de polarisation est le plus général c'est-à-dire elliptique. Le sens de rotation est donné par le signe de ε . L'hémisphère nord correspond donc aux états gauches alors que l'hémisphère sud correspond aux états droits.

Les paramètres de Stokes^[37] sont une interprétation physique simple de l'état de polarisation en liaison avec la représentation de Poincaré. Il est utile de les regrouper en une grandeur vectorielle à quatre composantes appelée vecteur de Stokes et notée $\vec{S} = (I, Q, U, V)^T$. L'Eq. 6 est déduite de l'Eq. 5 en posant les amplitudes complexes du champ égales à $A_P = E_P$ et $A_S = E_S \cdot e^{i\phi_0}$. Les deux premiers éléments du vecteur de Stokes se réécrivent simplement en fonction des notations de Jones évoquées précédemment : $I = I_P + I_S$ et $Q = I_P - I_S$.

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} I = \langle |A_P|^2 + |A_S|^2 \rangle \\ Q = \langle |A_P|^2 - |A_S|^2 \rangle \\ U = \langle A_P^* A_S + A_P A_S^* \rangle \\ V = i \langle A_P^* A_S - A_P A_S^* \rangle \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 6}$$

La variable I représente l'intensité lumineuse totale de l'onde, Q et U décrivent les états de polarisation linéaire et V les états circulaires de l'onde. Ainsi, Q représente la différence de polarisation dans les deux directions perpendiculaires, U est maximal lorsque le déphasage entre les deux composantes est nul (onde polarisée rectilignement) et V est maximal lorsque le déphasage atteint $\pi/2$ (onde polarisée elliptiquement). Les quatre composantes sont reliées entre elles par l'Eq. 7. On aura égalité uniquement si la polarisation est totale. Dans les autres cas, I^2 sera toujours supérieur à la somme des carrés des trois autres composantes.

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2 \quad \text{Eq. 7}$$

On en déduit le degré de polarisation de l'onde compris entre 0 et 1. Il est noté suivant l'anglicisme *DOP* (*Degree Of Polarization*) et s'écrit :

$$DOP = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} \cdot \frac{1}{I} \quad \text{Eq. 8}$$

Lorsque *DOP* est nul, la lumière est dite non polarisée et lorsqu'il vaut 1, la lumière est totalement polarisée. Dans les cas intermédiaires, on parle de lumière partiellement polarisée. Sur la sphère de Poincaré, les points représentatifs ne sont plus distribués uniformément mais se regroupent au voisinage d'un point M , point de probabilité maximum de l'état de polarisation. Le degré de polarisation quantifie cette grandeur statistique. On peut également définir le degré de polarisation linéaire *DOLP* (*Degree Of Linear Polarization*) et le degré de polarisation circulaire *DOCP* (*Degree Of Circular Polarization*) :

$$DOLP = \sqrt{Q^2 + U^2} \cdot \frac{1}{I} \quad \text{et} \quad DOCP = \frac{|V|}{I} \quad \text{Eq. 9}$$

L'intérêt de la représentation de Stokes réside dans la possibilité de décomposer le vecteur \vec{S} en deux vecteurs : \vec{S}_P pour la partie complètement polarisée et \vec{S}_{NP} pour la composante non polarisée. Le degré de polarisation relie ces deux termes tel que :

$$\vec{S} = \vec{S}_P + \vec{S}_{NP} = \begin{pmatrix} DOP \cdot I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-DOP) \cdot I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 10}$$

Lors de la propagation de l'onde, toute rotation des axes de polarisation \vec{u}_P et \vec{u}_S définis dans l'Eq. 2 entraîne la transformation des vecteurs de Stokes (cf. Figure 4).

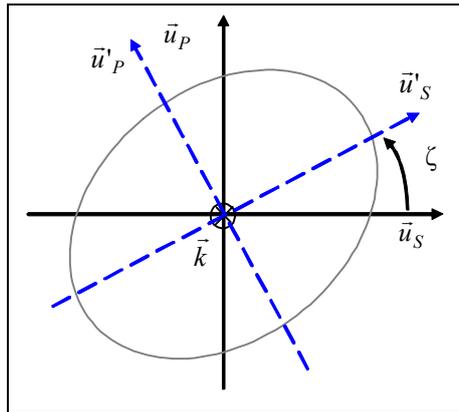


Figure 4 – Rotation des axes de polarisation.

Contrairement à Q et U , les composantes I , $(Q^2 + U^2)^{1/2}$ et V sont invariantes par rotation du système de coordonnées autour de l'axe de propagation \vec{k} des photons. Les expressions du vecteur dans le système de coordonnées avant et après rotation sont reliées par la matrice suivante :

$$\vec{S}_{\text{après rotation}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \zeta & \sin \zeta & 0 \\ 0 & -\sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{S}_{\text{avant rotation}} \quad \text{Eq. 11}$$

Nous avons vu que les paramètres de Stokes ne sont pas sensibles à la phase de l'onde optique, ils ne sont fonction que de l'intensité. La notion de vecteur de Stokes permet de traiter indifféremment le cas de lumière partiellement ou totalement polarisée. Son utilisation est facilitée par l'emploi de la notation vectorielle. Nous reviendrons sur ce point dans la dernière partie de ce chapitre après avoir présenté les grandeurs physiques qui caractérisent un milieu diffusant.

3 GRANDEURS CARACTERISTIQUES D'UN MILIEU DIFFUSANT

Les milieux diffusants d'intérêt sont constitués par des particules en suspension dans un liant dont l'indice de réfraction est différent. La distribution en taille et les morphologies de ces diffuseurs peuvent être variables. L'interaction matière-rayonnement est décrite par des grandeurs physiques qui relient les caractéristiques des particules et le rayonnement incident à la lumière diffusée. Cette partie reprend les définitions fondamentales nécessaires à la compréhension et à la modélisation de la lumière diffusée par un milieu quelconque. Dans un premier temps, nous considérons la diffusion de la lumière par une unique particule. Nous généraliserons cette approche en nous intéressant à un milieu constitué par plusieurs diffuseurs. Dans une deuxième partie, nous nous intéresserons aux données thermo-optiques polarisées mesurables pour un milieu diffusant.

3.1 NOTIONS SUR LES PARAMETRES RADIATIFS

Considérons une particule éclairée par une onde plane ou par un faisceau parallèle d'extension latérale supérieure à la dimension du diffuseur. De façon générale, la notion de **section efficace** σ_γ représente la surface effective d'interaction couverte par une particule de telle sorte que le rapport de cette surface de référence de 1 m^2 soit égale à la probabilité d'interaction entre le rayonnement lumineux et la particule. La section efficace d'extinction σ_{ext} [m^2] permet de définir l'énergie incidente sur cette surface (somme de l'énergie diffusée et absorbée). La section efficace de diffusion σ_{dif} définit la quantité totale de lumière diffusée et la section efficace d'absorption $\sigma_{abs} = \sigma_{ext} - \sigma_{dif}$ définit la quantité totale de lumière absorbée.

La section efficace est intimement liée à la taille de la particule par le biais de l'**efficacité** Q_γ . Cette dernière est définie comme étant le rapport de la section efficace sur la section géométrique σ_{geom} de la particule (cf. Eq. 12). Si les particules sont sphériques, la section géométrique σ_{geom} est égale à πr^2 où r est le rayon de la sphère.

$$Q_{ext} \equiv \frac{\sigma_{ext}}{\sigma_{geom}} \quad Q_{dif} \equiv \frac{\sigma_{dif}}{\sigma_{geom}} \quad Q_{abs} \equiv \frac{\sigma_{abs}}{\sigma_{geom}} \quad \text{Eq. 12}$$

Le domaine de l'optique géométrique est à considérer si la taille des particules est plus grande que la longueur d'onde λ . Dans ce cas, l'extinction est due à la partie du faisceau incident interceptée par la particule (σ_{geom}) à laquelle s'ajoute la partie du rayonnement qui est diffractée de l'autre côté du diffuseur. Considérons le cas de particules sphériques, cette dernière contribution sera égale à σ_{geom} . En effet, d'après le théorème de Babinet énoncé pour des sphères, la lumière diffractée par la sphère est identique à la lumière qui serait diffractée par un écran percé d'un trou de même taille que la sphère. L'efficacité d'extinction Q_{ext} pour des sphères dont le rayon est supérieur à λ tend rapidement vers 2.

Examinons le cas d'un milieu constitué par plusieurs diffuseurs caractérisés complètement par leurs propres caractéristiques de diffusion en champ lointain. Cette hypothèse est vérifiée si les « zones d'influence » des particules ne se recouvrent pas, autrement dit si elles ne sont pas trop proches les unes des autres. Supposons la répartition spatiale des particules dans le milieu aléatoire : les différentes ondes diffusées dans une direction donnée ont alors un déphasage aléatoire (pas d'interférence) et les intensités lumineuses diffusées sont additives. La diffusion devient indépendante, toutes les propriétés de diffusion sont additives.

Les **coefficients d'extinction, de diffusion ou d'absorption monochromatiques** d'un ensemble de particules (milieu non biréfringent) sont notés $k_{\gamma}^p(\lambda)$ [m^{-1}] avec $\gamma = \{ext, dif, abs\}$. Ils représentent l'intégration sur la taille des particules des sections efficaces $\sigma_{\gamma}(\lambda, r)$ multipliées par la concentration par unité de taille de particules.

$$k_{\gamma}^p(\lambda) = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sigma_{\gamma}(\lambda, r) \cdot \rho(r) \cdot dr \quad \text{avec} \quad \gamma = \{ext, dif, abs\} \quad \text{Eq. 13}$$

$\rho(r)$ est le nombre de particules par unité de volume [particules.m^{-3}] vérifiant $\int \rho(r) \cdot dr = N$ où N est le nombre total de particules contenues dans le milieu.

Dans le cas général de particules non sphériques et orientées, l'énergie du champ incident n'est pas la seule grandeur modifiée : l'état de polarisation est lui aussi changé. Ce phénomène est appelé dichroïsme du milieu diffusant^[41]. Il résulte des différentes valeurs d'extinction et de diffusion pour des états de polarisation différents. La description complète du processus d'extinction de l'onde polarisée dans le milieu requiert l'introduction d'une matrice d'extinction \mathbf{k}_{ext} et de diffusion \mathbf{k}_{dif} (dimension 4x4). Tsang *et al.*^[40] ont décrit l'expression de cette matrice. Pour nos milieux d'intérêt (particules sphériques et/ou symétriques orientées aléatoirement), le coefficient d'extinction reste invariant pour tous les états de polarisation : la matrice d'extinction devient alors le produit entre la matrice identité et le scalaire défini par l'Eq. 13.

Les coefficients d'extinction, de diffusion et d'absorption d'un ensemble de particules sont reliés entre eux par l'égalité suivante :

$$k_{ext}^p(\lambda) = k_{dif}^p(\lambda) + k_{abs}^p(\lambda) \quad \text{Eq. 14}$$

Dans le cas d'un liant à pertes, les sections efficaces (*i.e.* coefficients monochromatiques des particules) sont obtenues par des calculs différents de la théorie de Mie conventionnelle^[42]. L'Eq. 14 reste valable si les pertes du liant ($k_{abs}^l(\lambda)$) sont ajoutées à l'extinction des particules ($k_{ext}^p(\lambda)$). On définit le coefficient d'extinction du milieu par :

$$k_{ext}^m(\lambda) = k_{ext}^p(\lambda) + k_{abs}^l(\lambda) \quad \text{Eq. 15}$$

L'**albédo monochromatique** du milieu $\omega^m(\lambda)$ [sans dimension] est le rapport entre le coefficient de diffusion des particules et le coefficient d'extinction du milieu. On remarquera qu'une matrice albédo peut être introduite selon une démarche identique à celle développée pour les matrices \mathbf{k}_{dif} et \mathbf{k}_{ext} .

$$\omega^m(\lambda) = \frac{k_{\text{dif}}^m(\lambda)}{k_{\text{ext}}^m(\lambda)} \quad \text{Eq. 16}$$

L'albédo des particules s'écrit :

$$\omega^p(\lambda) = \frac{k_{\text{dif}}^p(\lambda)}{k_{\text{ext}}^p(\lambda)} \quad \text{Eq. 17}$$

Pour un milieu sans perte, les deux précédentes équations sont égales, soit : $\omega^m(\lambda) = \omega^p(\lambda)$.

L'intensité d'un faisceau collimaté qui traverse un milieu diffusant et/ou absorbant est diminuée en raison de l'atténuation par un facteur $e^{-\tau}$ où τ [sans dimension] est l'**épaisseur optique** pour un milieu unidimensionnel. Elle est le résultat de l'atténuation totale sur tout le parcours optique décrit par une abscisse curviligne S pour une longueur d'onde λ donnée :

$$\tau_\lambda = \int_S k_{\text{ext}}^m(\lambda, r) \cdot dS \quad \text{Eq. 18}$$

Les notions de **libres parcours moyens** sont parfois employées. Ces grandeurs sont définies comme étant l'inverse des coefficients monochromatiques k_γ . Le libre parcours moyen d'extinction $l = 1/k_\gamma$ est l'échelle de longueur sur laquelle le faisceau collimaté est atténué, diffusé ou absorbé.

La répartition angulaire de la lumière diffusée (sans prise en compte de la polarisation) est décrite par des **fonctions de phase**, analogues à des indicatrices de diffusion. A partir d'une direction incidente (θ_0, φ_0) , elles donnent la quantité de lumière diffusée dans la direction (θ, φ) et indiquent la probabilité qu'un photon incident reparte dans un angle solide donné, autour d'une direction donnée. Cette loi de probabilité [sans dimension] est notée $p_\lambda(\theta_0, \varphi_0, \theta, \varphi)$:

$$p_\lambda(\theta_0, \varphi_0, \theta, \varphi) = \frac{4\pi}{\sigma_{\text{dif}}(\lambda, r)} \cdot \frac{d\sigma_{\text{dif}}(\lambda, r)}{d\Omega} \quad \text{Eq. 19}$$

Elle vérifie la condition de normalisation suivante :

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi p_\lambda(\theta_0, \varphi_0, \theta, \varphi) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \equiv 1 \quad \text{Eq. 20}$$

En adoptant le formalisme de Stokes présenté dans la première partie de ce chapitre, il est possible de généraliser sous forme vectorielle la diffusion d'une onde incidente polarisée. Le passage de cette onde plane incidente (caractérisée par son vecteur de Stokes \vec{S}) à l'onde diffusée (caractérisée par \vec{S}') est donné par l'Eq. 21 où la matrice de diffusion en intensité \mathbf{M} est aussi appelée **matrice de Mueller** :

$$\vec{S}' = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \cdot \vec{S} = \mathbf{M} \cdot \vec{S} \quad \text{Eq. 21}$$

Le premier terme M_{11} équivaut à la fonction de phase décrite précédemment dans le cas scalaire. Les vecteurs \vec{S} et \vec{S}' sont définis respectivement pour des plans de polarisation dont \vec{k} et \vec{k}' sont les vecteurs de propagation.

En général, les M_{ij} sont non nuls. Les paramètres M_{11} et M_{12} donnent l'information sur la taille des particules présentes dans le milieu étudié. Si M_{13} est différent de zéro alors, il existe une direction privilégiée : l'orientation des diffuseurs dans le milieu n'est pas aléatoire. M_{22} est différent de M_{11} si les particules considérées ne sont pas sphériques. Il en est de même pour l'égalité entre les paramètres M_{33} et M_{44} . Enfin, M_{34} et M_{43} dépendent de la taille et de l'indice des particules. Si les particules sont orientées aléatoirement, on aura $M_{12} = M_{21}$ et $M_{43} = -M_{34}$. Si toutes les particules sont identiques et orientées aléatoirement, la matrice de Mueller se simplifie et devient diagonale par blocs.

$$\vec{S}' = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \cdot \vec{S} \quad \text{Eq. 22}$$

Lorsque le milieu est constitué par un ensemble de particules ayant le même indice et la même morphologie mais dont le paramètre de dimensionnement r varie, les coefficients de la matrice de diffusion globale sont des fonctions des coefficients pour une particule. En notant $\rho(r)$ la granulométrie du milieu diffusant, on obtient l'Eq. 23. Les différents types de granulométries (eg. log-normale) sont décrits en annexe.

$$M_{ij}(\lambda) = \frac{1}{k_{dif}(\lambda)} \cdot \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} M_{ij}(r, \lambda) \cdot \sigma_{dif}(r) \cdot \rho(r) \cdot dr \quad \text{Eq. 23}$$

Nous retiendrons qu'il est possible de normaliser la matrice de Mueller avec M_{11} et le vecteur de Stokes avec son premier paramètre I . Dans ces conditions, le flux est une variable qu'il faudra multiplier par le vecteur de Stokes diffusé.

La matrice de Mueller dépend de l'angle de diffusion Θ défini entre les deux vecteurs \vec{k} et \vec{k}' tel que :

$$\cos \Theta = \vec{k} \cdot \vec{k}' = \cos \theta' \cdot \cos \theta + \sin \theta' \cdot \sin \theta \cdot \cos(\varphi - \varphi') \quad \text{Eq. 24}$$

L'Eq. 11 met en évidence la nécessité de tenir compte de la rotation des axes de polarisation lors du changement de direction du vecteur de propagation. En effet, le vecteur de Stokes doit toujours être exprimé dans le repère global du système. Il est donc nécessaire de le modifier pour prendre en compte la rotation des axes de polarisation.

Cette adaptation s'effectue à l'aide de deux matrices de passage appliquées sur la matrice de Mueller correspondant respectivement à une rotation des axes d'un angle ζ_0 et ζ_1 avant et après le processus de diffusion. La matrice globale de diffusion \mathbf{M} est alors introduite selon :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\zeta_1 & \sin 2\zeta_1 & 0 \\ 0 & -\sin 2\zeta_1 & \cos 2\zeta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\zeta_0 & \sin 2\zeta_0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\zeta_0 & \cos 2\zeta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 25}$$

Nous reviendrons ultérieurement sur la définition de ces angles de rotation et le calcul des matrices de passage dans le prochain chapitre.

Le vecteur de Stokes \vec{S}' observé en sortie du système dépend directement du vecteur incident par une transformation linéaire. Le calcul matriciel permet donc d'associer N dispositifs. Le calcul est fait dans le sens inverse de celui des éléments rencontrés par la lumière.

$$\vec{S}' = \mathbf{M} \cdot \vec{S} = \mathbf{M}_N \cdot \mathbf{M}_{N-1} \dots \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \vec{S} \quad \text{Eq. 26}$$

Dans le cas de la diffusion de la lumière par des particules sphériques, la théorie de Mie permet d'obtenir la matrice de Mueller^[35] définie à partir des amplitudes complexes A_k :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (M_2 + M_1)/2 & (M_2 - M_1)/2 & 0 & 0 \\ (M_2 - M_1)/2 & (M_2 + M_1)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{21} & -D_{21} \\ 0 & 0 & D_{21} & S_{21} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M_k = |A_k|^2 \\ S_{jk} = (A_j A_k^* + A_k A_j^*)/2 \\ D_{jk} = -i(A_j A_k^* - A_k A_j^*)/2 \end{cases} \quad \text{Eq. 27}$$

Si on considère la diffusion de Rayleigh, la matrice de Mueller prendra la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2\theta & 1 - \cos^2\theta & 0 & 0 \\ 1 - \cos^2\theta & 1 + \cos^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 28}$$

On peut citer d'autres exemples de matrices de Mueller simples pour des éléments courants tels que les polariseurs, les déphaseurs ou les rotateurs. L'axe OX est l'axe lent des déphaseurs et les rotations des rotateurs sont positives dans le sens trigonométrique pour un observateur recevant de la lumière.

Polariseur rectiligne parallèle à OX

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Polariseur rectiligne parallèle à OY

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Polariseur rectiligne à 45°

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Polariseur rectiligne $\theta=(Ox,OX)$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Polariseur circulaire gauche

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eq. 29

Polariseur circulaire droit

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dépolariseur

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déphaseurs – lame demi-onde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déphaseurs – lame quart d'onde

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lame de phase (déphasage ϕ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Rotateur d'angle α

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme nous venons de le voir, la matrice de Mueller caractérise parfaitement le milieu parcouru par la lumière polarisée. La résolution de l'Equation de Transfert Radiatif Polarisée (ETRP) que nous aborderons dans une autre section, nécessite une bonne connaissance de la matrice de Mueller. Différents modèles numériques^[38] permettent d'obtenir les différents termes F_{ij} dans le cas de particules non sphériques. Dans le cas de sphères, la théorie de Mie est suffisante et nous utiliserons le code développé par Mishchenko^[42].

Pour des particules non sphériques, nous pouvons citer :

- La méthode d'**approximation du dipôle** (Discrete Dipole Approximation ou DDA), utilisée par exemple dans le code DDSCAT^[39] et développée par Draine et Flatau, permet de calculer les éléments de la matrice de Mueller en fonction de la polarisation de l'onde incidente. La cible est considérée comme étant constituée par une multitude de dipôles placés sur une grille. Cette méthode permet l'étude de particules ayant des géométries variées mais nécessite des temps de calcul importants.
- La méthode de la **T-matrice** (exemple de code : CRMIM de Mishchenko^[38]) est utilisée pour le calcul de la diffusion de la lumière par des particules polydisperses, indépendantes, orientées aléatoirement et ayant un axe de symétrie (*cf.* Annexe « Morphologie et taille des particules »). La modélisation de la T-matrice impose que

tous les champs soient exprimés par des fonctions d'onde. Elle est seulement fonction des propriétés optiques et géométriques d'une particule. Le principal avantage de cette méthode réside dans l'expression de la matrice \mathbf{T} globale puisqu'elle est fonction de toutes les diffusions individuelles de chaque diffuseur. Elle est donc valable quel que soit le nombre de particules présentes dans le milieu et reste stable pour de forts paramètres de taille (~ 100). Cette méthode donne la solution exacte des équations de Maxwell avec des temps de calcul raisonnables par rapport à DDSCAT.

L'évolution des éléments M_{ij} de la matrice de Mueller normalisés par rapport à M_{11} est présentée sur les courbes suivantes pour un milieu d'indice n_{milieu} contenant des particules d'indice $n_{particules}$. Les diffuseurs sont considérés comme étant sphériques (orientation aléatoire et symétrie axiale) : M_{11} , M_{33} , M_{12} et M_{34} sont les seuls éléments à calculer. La distribution en taille correspond à une loi log-normale centrée sur un rayon moyen r_g et dont l'écart type σ_g est égal à 1,2. La longueur d'onde du rayonnement est celle d'un laser Nd:Yag dans le visible ($\lambda = 532 \text{ nm}$).

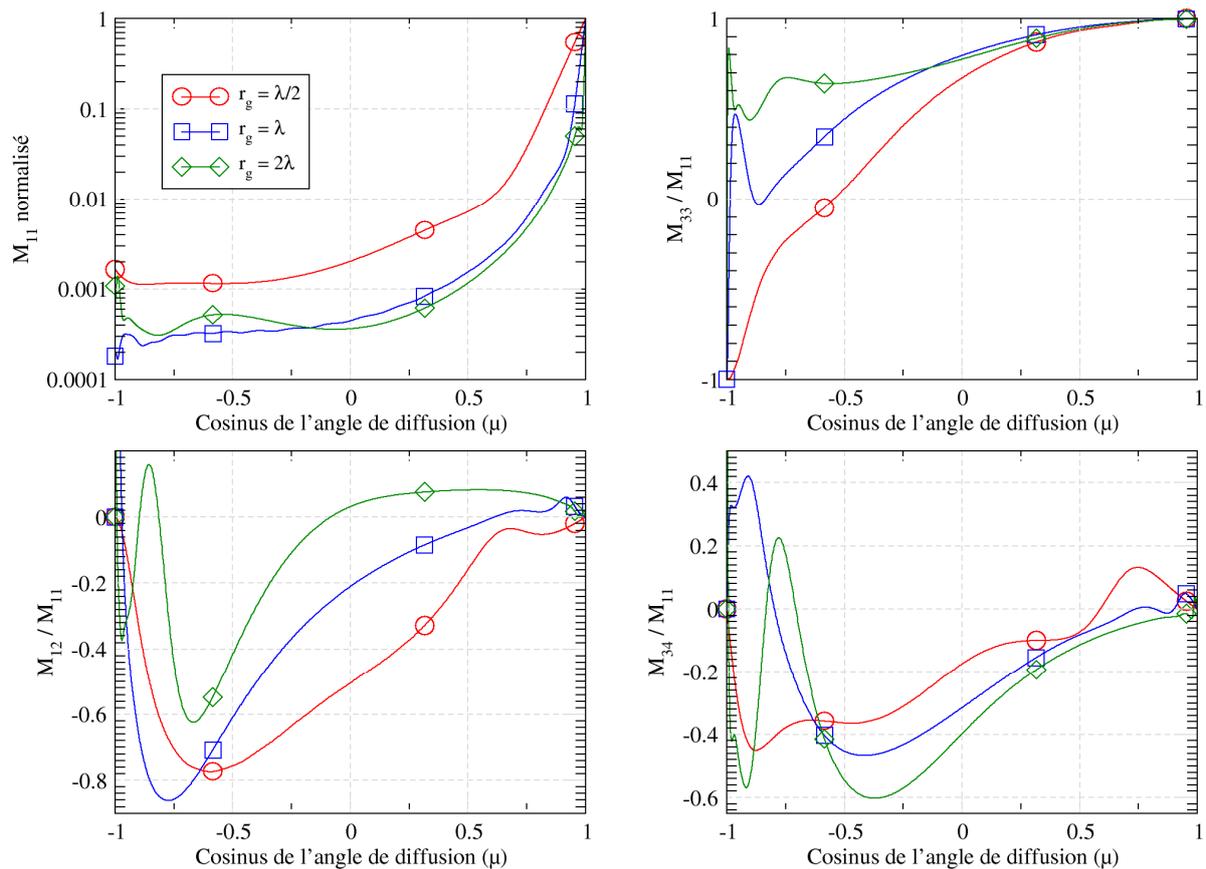


Figure 5 – Evolution des M_{ij} en fonction des angles de diffusion pour des particules de latex dans de l'eau.

La Figure 5 témoigne de la différence de comportement angulaire pour des rayons moyens r_g variant de $\lambda/2$ à 2λ . On constate en particulier que pour le premier terme M_{11} , la diffusion avant (pour des μ proche de 1) est importante quelle que soit la valeur de r_g . La rétrodiffusion est quant à elle privilégiée dans le cas des petites particules (petites devant la longueur d'onde). Le paramètre M_{12}/M_{11} représente la capacité du diffuseur à modifier la polarisation de l'onde incidente. Ce comportement est différent en fonction de la taille des particules. On en déduit l'importance de la granulométrie du milieu sur la diffusion de la lumière polarisée. Cette remarque reste valable quelle que soit la géométrie des particules. Les différents éléments de la matrice de Mueller caractérisent parfaitement la nature des diffuseurs : les M_{ij} dépendent de toutes les propriétés microphysiques de chacun des diffuseurs (distribution en taille, indice, géométrie...).

Après avoir déterminé les paramètres radiatifs, nous définissons maintenant les données qui sont accessibles expérimentalement et qui vont dépendre des caractéristiques microscopiques et macroscopiques du milieu.

3.2 DONNEES THERMO-OPTIQUES MESURABLES

Les notations que nous allons définir par la suite sont celles utilisées traditionnellement dans le domaine du transfert radiatif^[34]. Le rayonnement lumineux, pour un intervalle spectral $d\lambda$ centré sur la longueur d'onde λ , est caractérisé par une luminance $\vec{L}(z, \theta, \varphi)$ exprimée en $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$. On remarquera que la dépendance spectrale [μm^{-1}] est omise. Cette grandeur physique peut être vectorielle et être représentée à l'aide du formalisme de Stokes. Chaque élément de ce vecteur est exprimé dans les mêmes unités que dans le cas scalaire.

Considérons un élément de volume dV d'un milieu unidimensionnel dont les surfaces élémentaires dS_1 et dS_2 sont les frontières supérieure et inférieure (cf. Figure 6). On note $\vec{L}_0(z_0, \theta_0, \varphi_0)$ la luminance incidente sur la surface dS_1 . La luminance diffusée en O_1 par l'élément de surface dS_1 et de volume dV est donnée par $\vec{L}_1(z_1, \theta_1, \varphi_1)$. On définit enfin par $\vec{L}_2(z_2, \theta_2, \varphi_2)$ la luminance diffusée en O_2 par le deuxième élément de surface dS_2 et l'élément de volume dV .

La **réflectivité monochromatique bidirectionnelle** [sr^{-1}] est la fonction différentielle reliant la luminance $\vec{L}_1(z_1, \theta_1, \varphi_1)$ réfléchiée par dS_1 et diffusée par dV à l'éclairement incident $\vec{E}_0(z_0, \theta_0, \varphi_0)$. La *Bidirectional Reflectance Distribution Function* ou BRDF est donnée par :

$$BRDF_i(z_0, \theta_0, \varphi_0, z_1, \theta_1, \varphi_1) = \frac{L_{1,i}(z_1, \theta_1, \varphi_1)}{E_{0,i}(z_0, \theta_0, \varphi_0)} \quad \text{Eq. 30}$$

où i est le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur de Stokes.

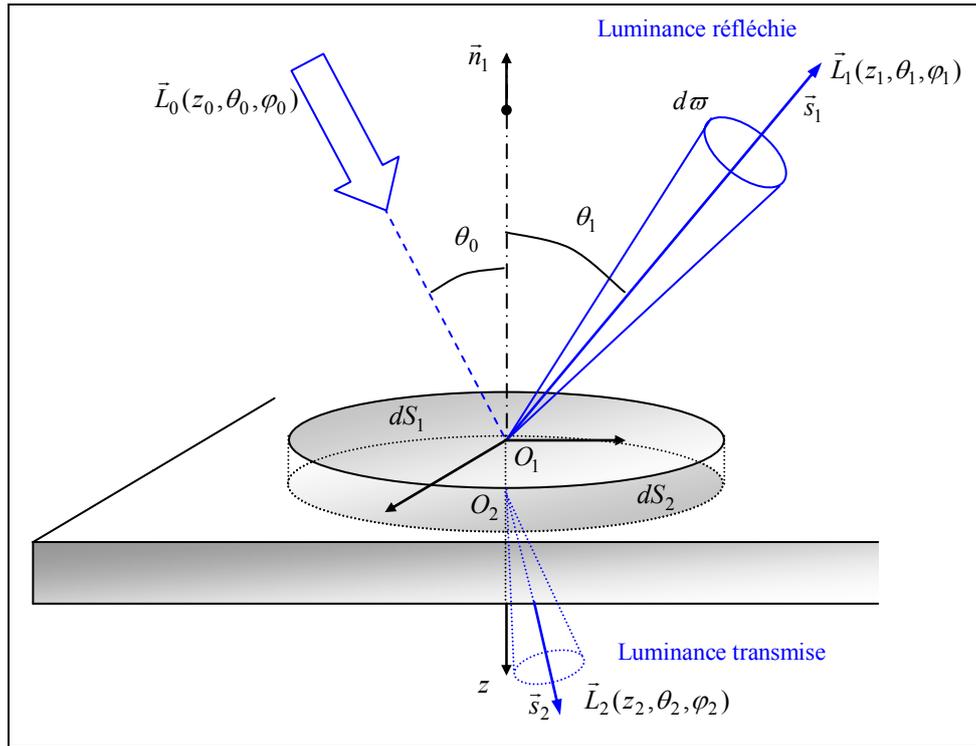


Figure 6 – Représentation des luminances pour un milieu diffusant unidimensionnel.

Pour un milieu semi-transparent, la **transmittivité monochromatique bidirectionnelle** (ou BTDF pour *Bidirectional Transmittance Distribution Function*) relie l'éclairement incident à la luminance transmise par :

$$BTDF_i(z_0, \theta_0, \varphi_0, z_2, \theta_2, \varphi_2) = \frac{L_{2,i}(z_2, \theta_2, \varphi_2)}{E_{0,i}(z_0, \theta_0, \varphi_0)} \quad \text{Eq. 31}$$

où i est le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur de Stokes.

On définit également la notion de **flux lumineux** à partir des luminances $L_i(z, \theta, \varphi)$. Ce flux d^2P [W] qui traverse une surface élémentaire dS dans un angle solide élémentaire $d\omega$ autour d'une direction \vec{s} faisant un angle θ avec la normale \vec{n} vaut :

$$d^2P = L_i(z, \theta, \varphi) \cdot \cos \theta \cdot dS \cdot d\omega \quad \text{Eq. 32}$$

L'**intensité** $I(z, \theta, \varphi)$ qui est définie par l'Eq. 33 s'exprime en $\text{W} \cdot \text{sr}^{-1}$ si la surface élémentaire est égale à 1 m^2 . En transfert radiatif, cette grandeur est considérée (abusivement) comme étant un « flux ».

$$I(z, \theta, \varphi) = L(z, \theta, \varphi) \cdot |\cos \theta| \quad \text{Eq. 33}$$

où $L(z, \theta, \varphi)$ est le premier élément du vecteur luminance. Il est parfois pratique de travailler avec des données qui sont normalisées par rapport à $I(z, \theta, \varphi)$. Ainsi, le taux de polarisation rectiligne est le rapport entre les deux premiers éléments du vecteur de Stokes *i.e.* $Q(z, \theta, \varphi)/I(z, \theta, \varphi)$. Ces deux quantités sont directement accessibles car elles font intervenir les modules au carré des amplitudes complexes (en S et P) du champ électrique (*cf.* Eq. 6). Nous développerons plus loin les méthodes d'acquisition mises en œuvre pour retrouver ces grandeurs physiques.

On remarquera enfin que les luminances introduites précédemment se séparent en deux types de rayonnements (Stamnes 1988). Ces notations sont utilisées pour résoudre l'ETRP et dissocier la contribution du champ diffus de la luminance collimatée :

1. Le rayonnement diffus se propage dans toutes les directions de l'espace. Il s'agit d'un rayonnement divergent caractérisé par la quantité de rayonnement lumineux se propageant dans un angle solide élémentaire $d\varpi$ autour de la direction d'angle polaire θ et d'azimut φ . La luminance diffuse \bar{L}_d s'exprime donc par unité d'angle solide.
2. Les faisceaux collimatés ou spéculaires sont non divergents et sont progressivement diffusés (transformés en rayonnement diffus) par le milieu. On associe également aux luminances collimatées (notation \bar{L}_c) la luminance incidente réfléchie ou transmise qui demeure dans le même plan que celui de l'onde incidente.

4 SYNTHÈSE

Dans ce chapitre, nous avons introduit les notions essentielles au traitement de la diffusion polarisée de la lumière par des milieux diffusants. Le formalisme de Stokes est nécessaire pour représenter les différents états de polarisation d'une onde plane qui interagit avec un milieu. Cette forme vectorielle permet de représenter des états complètement ou partiellement polarisés, généralisant son utilisation à tous les cas d'étude. Un milieu est parfaitement caractérisé par ses paramètres radiatifs que sont l'albédo, l'épaisseur optique et la matrice de diffusion appelée matrice de Mueller. La notation matricielle présente certains avantages sur le plan formel : un milieu diffusant est représenté par une simple matrice indépendante de l'éclairement incident. Les notations adoptées ici sont conservées tout le long du mémoire. Elles vont nous permettre d'aborder dans le prochain chapitre le formalisme de l'ETRP et les méthodes de résolution utilisées dans le cadre de ces travaux.

CHAPITRE II :

MODELISATION DU TRANSFERT RADIATIF POLARISE DANS LES MILIEUX HETEROGENES

1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente la modélisation de la diffusion polarisée de la lumière pour un milieu hétérogène parfaitement caractérisé : soit par ses propriétés microphysiques (granulométrie, indice de réfraction, géométrie des diffuseurs...), soit par les propriétés intégrées que sont les paramètres radiatifs (épaisseur optique, albédo et matrice de Mueller). Cette modélisation s'appuie sur la résolution de l'Equation de Transfert Radiatif Polarisé (ETRP) qui permet de calculer le vecteur de Stokes diffusé à partir des données d'entrée précitées.

Après avoir exposé l'expression générale de l'ETRP, nous présentons dans une première partie la méthode de résolution de cette équation en géométrie 1D. En effet, pour être utilisable dans une démarche d'optimisation des paramètres radiatifs avec des temps de calculs raisonnables, une simplification de la géométrie du problème s'impose. La démarche adoptée permet de déduire la *BRDF-BTDF* polarisée de milieux semi-transparents hétérogènes unidimensionnels.

Cette étude se généralise ensuite à la géométrie tridimensionnelle. Une approche phénoménologique de type Monte Carlo est utilisée pour sa simplicité de mise en œuvre et sa souplesse d'utilisation. Nous abordons dans une deuxième partie de ce chapitre les grands principes ayant conduits au développement d'un code Monte Carlo en géométries tridimensionnelles (3D) de type cartésienne et cylindrique. Les applications de cet outil sont essentiellement liées à la génération de données polarisées de référence et à l'étalonnage du banc expérimental.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la validation par inter-comparaison de ces deux outils numériques et à une étude comportementale de la diffusion polarisée de milieux hétérogènes.

2 RESOLUTION DE L'EQUATION DU TRANSFERT RADIATIF POLARISEE EN 1D

2.1 GENERALITES

L'ETRP est une équation de type intégral-différentiel dont la résolution analytique s'avère complexe en dehors de quelques cas simples. Les principales hypothèses simplificatrices concernent la symétrie azimutale et l'étude de milieux unidimensionnels. Les méthodes analytiques classiques (méthodes F_N ^{[44][45]} ou des harmoniques sphériques P_N) demeurent des cas de référence pour tester des modèles approchés tels que ceux à deux flux. Les méthodes de zones^[46] ou des éléments finis^[47] sont très utilisées mais elles nécessitent des temps de calcul non négligeables. Les méthodes multi-flux divisent l'espace angulaire en un nombre fini de directions où la luminance y est constante. Chandrasekhar^[34] a adapté une variante des méthodes N-flux dites d'ordonnées discrètes pour étudier le couplage rayonnement/conduction et/ou convection. L'ETRP passe d'une forme intégral-différentielle à un système d'équations différentielles par discrétisation angulaire. Analytiquement, on recherche la solution homogène puis on calcule la solution particulière à partir des conditions limites.

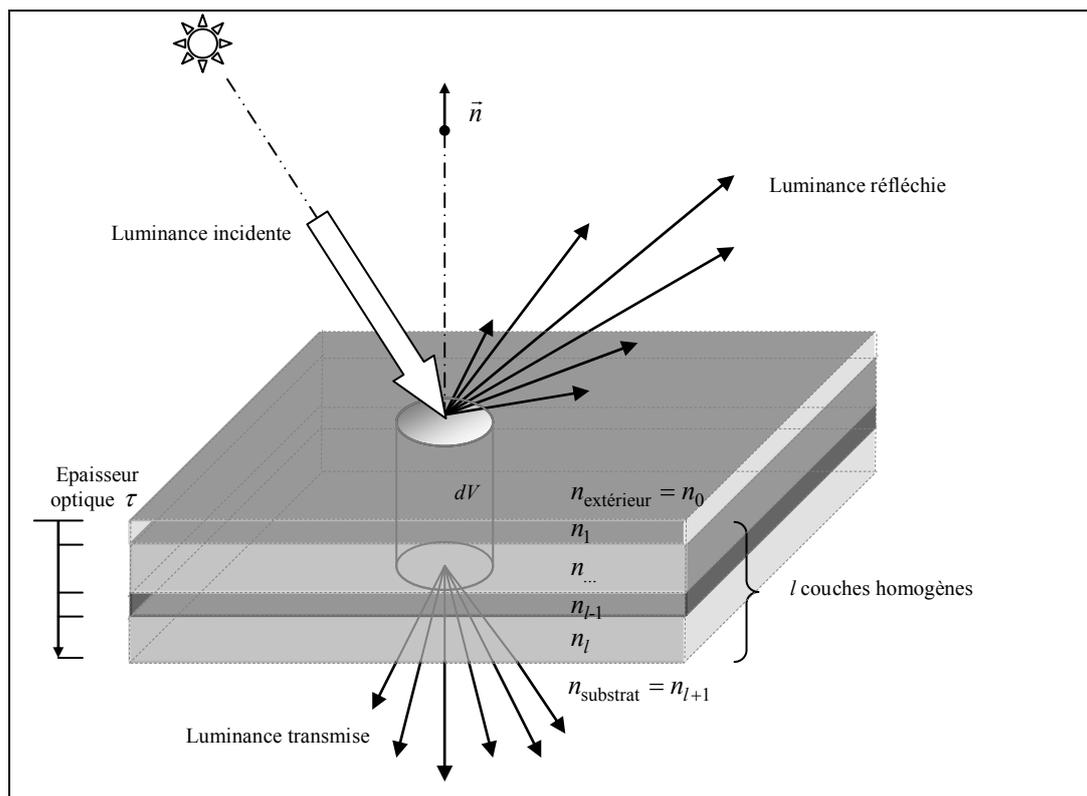


Figure 7 – Géométrie d'un milieu hétérogène semi-infini, constitué par l couches homogènes.

Les travaux actuels^[49] qui ne font pas l'hypothèse de symétrie azimutale sont essentiellement développés pour des applications dans le domaine atmosphérique^{[19][08]} ou océanique. Les milieux hétérogènes atmosphériques peuvent être simplifiés si on considère qu'ils sont homogènes par couche en fonction de l'altitude avec des conditions limites telles que la présence d'un sol. Dans ces conditions, l'évolution de l'indice optique entre les différentes couches homogènes n'est pas prise en compte. L'angle d'incidence du rayonnement solaire (non

polarisé) est quelconque et les propriétés radiatives d'une couche traversée sont considérées comme étant connues et constantes pour l'ensemble des directions dans cette couche. Notre démarche de résolution de l'ETRP (1D) s'inspire de ces méthodes. Elle est basée sur une technique de résolution par *adding-doubling* permettant l'étude de milieux multi-couches. Pour modéliser des matériaux quelconques tels que ceux décrits par la Figure 7, il sera important d'introduire la notion de changement d'indice au passage de chaque couche (*cf.* Annexe A) et de considérer un éclairage incident polarisé.

2.2 EQUATION DU TRANSFERT RADIATIF POLARISE

L'équation du transfert radiatif polarisé (ETRP) traduit, à une fréquence ν donnée, le bilan des mécanismes physiques d'interaction entre un rayonnement incident et un milieu absorbant, diffusant ou émissif. La luminance polarisée $\vec{L}(\vec{x}, \vec{s})$ (exprimée dans le formalisme de Stokes) en un point de l'espace de coordonnées \vec{x} et orienté dans la direction \vec{s} vérifie l'ETRP monochromatique (3D) :

$$\vec{s} \cdot \nabla \vec{L}(\vec{x}, \vec{s}) + \mathbf{k}_{\text{ext}}(\vec{x}) \cdot \vec{L}(\vec{x}, \vec{s}) = \frac{\mathbf{k}_{\text{dif}}(\vec{x})}{4\pi} \cdot \int_{\Omega} \mathbf{P}(\vec{x}, \vec{s}, \vec{s}') \cdot \vec{L}(\vec{x}, \vec{s}') \cdot d\varpi(\vec{s}') + \mathbf{k}_{\text{abs}}(\vec{x}) \cdot \vec{L}^0(T) \quad \text{Eq. 34}$$

avec $d\varpi(\vec{s}')$ l'angle solide normalisé et mesuré sur une sphère unité Ω , $\mathbf{k}_{\text{ext}}(\vec{x})$ le coefficient d'extinction (sous forme matricielle), $\mathbf{k}_{\text{dif}}(\vec{x})$ le coefficient de diffusion, $\mathbf{k}_{\text{abs}}(\vec{x})$ le coefficient d'absorption et $\mathbf{P}(\vec{x}, \vec{s}, \vec{s}')$ la matrice de diffusion globale. Le coefficient de diffusion est extrait de l'intégrale car il n'est pas modifié quelle que soit la direction considérée (cas de particules sphériques). On note $\vec{L}^0(T)$ la luminance totale non polarisée du corps noir donnée par l'Eq. 35 où T est la température au point \vec{x} , n l'indice de réfraction du milieu équivalent à un milieu homogène au point \vec{x} et σ la constante de Stefan-Boltzmann ($\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$). Ce terme permet de prendre en compte les émissions propres au matériau.

$$\vec{L}^0(T) = \begin{cases} n^2 \cdot \sigma \cdot T^4 / \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 35}$$

Le système de coordonnées cartésiennes est adopté pour projeter le rayonnement $\vec{L}(\vec{x}, \vec{s})$. La Figure 8 représente les cosinus directeurs (η, ξ, μ) et la géométrie du problème en trois dimensions dans le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'angle correspondant à θ est appelé l'angle zénithal et celui correspondant à φ l'azimut.

$$\vec{s} = \begin{cases} \eta = \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \xi = \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ \mu = \cos \theta \end{cases} \quad \text{Eq. 36}$$

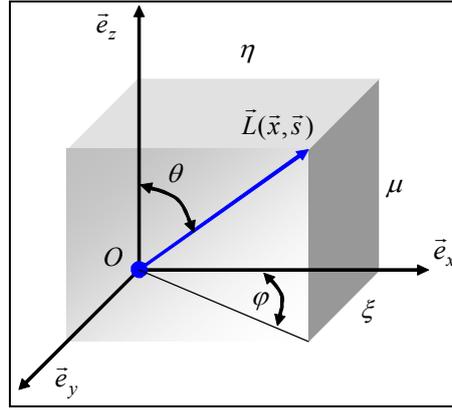


Figure 8 – Représentation du vecteur luminance en coordonnées cartésiennes.

Pour simplifier l'Eq. 34, nous considérons une géométrie unidimensionnelle dans un repère cartésien. Le milieu est semi-infini dans le plan (x, O, y) . Les propriétés microphysiques du milieu varient uniquement selon l'axe des z et restent constantes entre deux altitudes z_- et z_+ qui définissent une couche homogène. La géométrie du problème est représentée par la Figure 9.

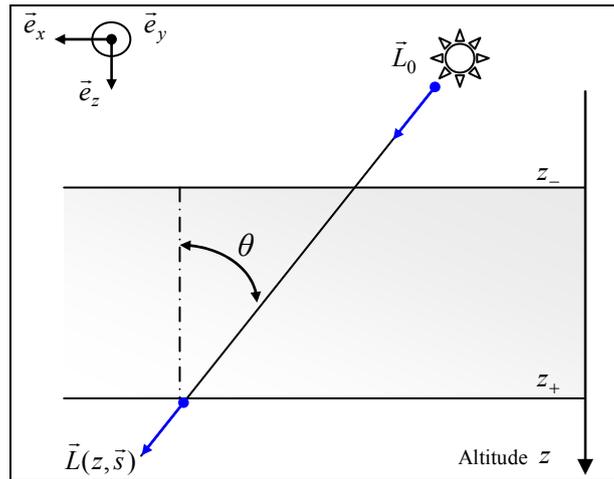


Figure 9 – Représentation du vecteur luminance dans le plan (x, O, y) .

Pour un milieu unidimensionnel, la luminance ne dépend que de l'épaisseur de la couche traversée z et des angles polaires θ et φ : $\vec{L}(\vec{x}, \vec{s}) = \vec{L}(z, \theta, \varphi)$. On en déduit une expression simplifiée de l'ETRP, après avoir effectué le changement de variable $\mu = \cos \theta$.

$$\mu \cdot \frac{\partial \vec{L}}{\partial z} + \mathbf{k}_{\text{ext}} \cdot \vec{L} = \frac{\mathbf{k}_{\text{dif}}}{4\pi} \cdot \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \vec{L} \cdot d\varpi + \mathbf{k}_{\text{abs}} \cdot \vec{L}^0(T) \quad \text{Eq. 37}$$

Mishchenko^[41] a démontré que dans un milieu isotope où les particules possèdent une symétrie axiale, les coefficients d'extinction, d'absorption et de diffusion sont indépendants de la direction et de la polarisation de la luminance incidente. Les matrices \mathbf{k}_{ext} , \mathbf{k}_{abs} et \mathbf{k}_{dif} sont alors remplacées par des matrices diagonales dont tous les éléments sont égaux :

$$\mathbf{k}_\gamma = \begin{bmatrix} k_\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_\gamma \end{bmatrix} \quad \text{avec } \gamma = \{ext, abs, dif\} \quad \text{Eq. 38}$$

En utilisant l'Eq. 38, en introduisant l'épaisseur optique τ et l'albédo ω définis dans le premier chapitre, puis en tenant compte de la relation $\frac{1}{k_{ext}(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} f(z) = \frac{\partial}{\partial \tau} f(\tau)$, l'ETRP en géométrie 1D s'exprime finalement sous la forme suivante :

$$\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{L} = -\bar{L} + \frac{\omega}{4\pi} \cdot \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \bar{L} \cdot d\varpi + (1 - \omega) \cdot \bar{L}^0(T) \quad \text{Eq. 39}$$

2.3 RESOLUTION DU TRANSFERT RADIATIF POLARISE EN GEOMETRIE 1D

Après avoir rapidement présenté quelques généralités sur les méthodes conventionnelles et en particulier sur la méthode d'*adding-doubling* que nous utiliserons, nous allons aborder dans cette section la démarche de résolution de l'ETRP. Ces méthodes déterministes sont mises en œuvre lorsque la géométrie du système peut être décrite simplement. Pour limiter les temps de calcul, les résolutions classiques considèrent principalement des géométries unidimensionnelles comme celles décrites précédemment.

2.3.1 METHODES DE RESOLUTION EN GEOMETRIE 1D

La méthode de **diffusions successives**^[48] (ou solution des séries de Neuman) permet de calculer la lumière diffusée au premier ordre (une seule diffusion) puis de généraliser le processus à n diffusions. Ces calculs sont parfaitement adaptés pour des couches inhomogènes et des fonctions de phases anisotropes mais sont difficilement adaptables pour des épaisseurs optiques supérieures à l'unité.

Ambartsumian^[51] propose dès 1943 de décomposer le milieu en de nombreuses couches minces où seule la diffusion simple est possible. Cette première approche fournit de bons résultats, même pour de fortes épaisseurs optiques. Toutefois, elle ne peut pas être appliquée à une démarche d'optimisation des paramètres radiatifs car les temps de calculs sont trop importants pour de fortes épaisseurs optiques.

La méthode dite des **ordonnés discrètes**^[52] divise l'ETRP en N flux discrets pour obtenir N équations à N inconnues. La résolution numérique est assez rapide. Pour des fonctions anisotropes, le nombre de flux nécessaires devient rapidement un facteur limitant pour les temps de calcul. Lorsque N est supérieur à 20, le système d'équations à résoudre est également mal conditionné.

Pour simplifier la résolution de l'ETRP en dehors de l'incidence normale, la condition de symétrie azimutale est parfois imposée : toutes les variables sont alors indépendantes de φ et deviennent constantes autour d'un cône de l'angle solide centré sur l'axe (Oz). Cette hypothèse permet d'obtenir la moyenne des intensités diffusées dans tous les plans azimutaux. Si cette hypothèse de symétrie azimutale n'est pas vérifiée (ce qui est le cas en dehors de l'incidence normale), le champ de luminance diffusée ne peut plus être considéré comme étant constant quel que soit φ .

Nos travaux s'inspirent de la formulation donnée par Chandrasekhar^[34] et reprise par Özisik^[53]. Ils proposent de décomposer la luminance en série de Fourier pour résoudre l'ETRP sans dépendance azimutale. Dans cette méthode, la matrice de phase décrivant le milieu traversé doit impérativement être écrite sous forme de polynômes de Legendre. De plus, nous appliquons la méthode dite d'*adding-doubling* valable pour la diffusion isotrope et anisotrope d'un milieu stratifié. Nous allons maintenant décrire la théorie associée au code *METROPOL* (Modélisation de l'Equation de Transfert Radiatif en Optique POLarisée) que nous avons développé pour résoudre l'ETRP dans le cas monochromatique. Ce modèle est adapté des travaux de Evans et Stephens^[19] et permet l'étude de la luminance à la sortie d'un milieu inhomogène (succession de couches homogènes) contenant des particules orientées aléatoirement. Leur morphologie peut être quelconque tant qu'elles possèdent un plan de symétrie.

Pour commencer, nous écrivons l'ETRP sous une forme matricielle pour pouvoir lui appliquer la résolution par *adding-doubling*. Pour cela, les luminances mises en jeu et leurs différentes contributions sont tout d'abord explicitées.

2.3.2 ECRITURE MATRICIELLE DE L'ETRP

Le milieu qui doit être modélisé est représenté sur la Figure 7. Il est constitué par l couches successives unidimensionnelles. Chacune d'entre elles est caractérisée indépendamment des autres par son épaisseur optique τ_i et par son indice de réfraction n_i où i est le numéro de la couche. On considère que l'éclairement incident peut indépendamment provenir de la partie supérieure ($i-1$) et de la partie inférieure ($i+1$) de cette couche.

Les travaux actuels de Evans et Stephens^[19] font l'hypothèse que l'indice est constant sur tout le milieu. Pour tenir compte de la modification de l'indice après changement de couche et de la conservation de l'énergie, il est indispensable d'introduire les matrices de réflexion et de transmission des interfaces liées au changement d'indice. Les coefficients de Fresnel (r_s et r_p) et la construction de ces matrices sont définis dans l'annexe A de ce chapitre.

- **Séparation en deux termes de la luminance**

A l'intérieur de la $i^{\text{ème}}$ couche homogène, la luminance $\vec{L}(z, \theta, \varphi)$ se décompose en deux contributions : la luminance collimatée (cohérente) \vec{L}_c et la luminance diffuse \vec{L}_d .

$$\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{L}_d \quad \text{Eq. 40}$$

Le champ de luminance collimaté est réduit à une équation différentielle homogène sans second membre :

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{L}_c + \vec{L}_c = 0 \quad \text{Eq. 41}$$

En effectuant le changement de variable précédent et en introduisant l'Eq. 40 et l'Eq. 41 dans l'Eq. 39, on obtient :

$$\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{L}_d = -\vec{L}_d + \frac{\omega}{4\pi} \cdot \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \vec{L}_d \cdot d\varpi + \omega \cdot \bar{\sigma}_{\text{col}} + \bar{\sigma}_T$$

$$\text{avec } \bar{\sigma}_{\text{col}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Omega} \mathbf{P} \cdot \vec{L}_c \cdot d\varpi \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_T = (1 - \omega) \cdot \begin{cases} L^0(T) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 42}$$

Dans l'Eq. 42, le vecteur $\bar{\sigma}_T$ représente le terme des sources thermiques décrit par la loi de Stefan-Boltzmann (cf. définition dans l'Eq. 35). Cette nouvelle formulation permet également d'écrire l'ETRP en fonction de la luminance diffuse et d'un terme source $\bar{\sigma}_{\text{col}}$ faisant intervenir uniquement la luminance collimatée.

Les vecteurs luminances \vec{L}_d et \vec{L}_c se séparent en fonction d'une composante montante et d'une composante descendante. Le calcul des différents angles de diffusion θ utilise une quadrature de type Gauss-Lobatto. L'espace est donc discrétisé en N_{gauss} directions (cf. Annexe B). L'orientation des μ (cosinus de l'angle de diffusion) est faite de telle sorte qu'ils soient positifs dans le sens de propagation du faisceau incident (vers le bas sur la Figure 9) et négatifs dans le cas contraire. Au passage d'une interface avec changement d'indices, la modification de la direction des luminances entraîne également la modification des angles solides : la quadrature doit être adaptée (poids et répartition angulaire). Nous revenons plus en détail sur la génération de la quadrature, sa modification et le traitement du cône de réfraction dans les annexes de ce chapitre.

- **Expression de la luminance diffuse**

La luminance diffuse \vec{L}_d s'exprime à partir de deux vecteurs \vec{L}_d^+ et \vec{L}_d^- définis sur des intervalles de μ particuliers :

$$\vec{L}_d^+(\tau, \mu, \varphi) = \begin{cases} \vec{L}_d(\tau, \mu, \varphi) & \text{si } \mu > 0 \\ \vec{0} & \text{si } \mu \leq 0 \end{cases}, \quad \vec{L}_d^-(\tau, \mu, \varphi) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \mu > 0 \\ \vec{L}_d(\tau, \mu, \varphi) & \text{si } \mu \leq 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 43}$$

où $\vec{0} = (0,0,0,0)^T$ est le vecteur nul représenté dans le formalisme de Stokes.

Pour le milieu décrit par la Figure 7 et d'épaisseur optique totale τ_T , l'absence de rayonnement diffus incident aux frontières du milieu se traduit par la relation suivante :

$$\begin{aligned} L_d^+(\tau=0, \mu, \varphi) &= 0 \\ L_d^-(\tau=\tau_T, \mu, \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 44}$$

L'ETRP est calculée sur les deux intervalles définis dans l'Eq. 43. On obtient un système de deux équations :

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial \bar{L}_d^+(\tau, \mu, \varphi)}{\partial \tau} &= -\bar{L}_d^+(\tau, \mu, \varphi) + \frac{\omega}{4\pi} \cdot \int_{-1}^0 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \mathbf{P}(\tau, \mu, \varphi, \mu', \varphi') \cdot \bar{L}_d^-(\tau, \mu', \varphi') \\ &+ \frac{\omega}{4\pi} \cdot \int_0^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \mathbf{P}(\tau, \mu, \varphi, \mu', \varphi') \cdot \bar{L}_d^+(\tau, \mu', \varphi') \\ &+ \omega \cdot \bar{\sigma}_{\text{col}}^+ + \bar{\sigma}_T^+ \end{aligned} \quad \text{Eq. 45}$$

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial \bar{L}_d^-(\tau, \mu, \varphi)}{\partial \tau} &= -\bar{L}_d^-(\tau, \mu, \varphi) + \frac{\omega}{4\pi} \cdot \int_{-1}^0 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \mathbf{P}(\tau, \mu, \varphi, \mu', \varphi') \cdot \bar{L}_d^-(\tau, \mu', \varphi') \\ &+ \frac{\omega}{4\pi} \cdot \int_0^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\varphi' \cdot \mathbf{P}(\tau, \mu, \varphi, \mu', \varphi') \cdot \bar{L}_d^+(\tau, \mu', \varphi') \\ &+ \omega \cdot \bar{\sigma}_{\text{col}}^- + \bar{\sigma}_T^- \end{aligned}$$

- **Expression des termes sources**

Le terme source lié au collimaté ($\bar{\sigma}_{\text{col}}$) fait intervenir la luminance collimatée \bar{L}_c dans la direction incidente $\mu_0 > 0$ et dans le plan d'incidence φ_0 . En la décomposant à l'identique de la luminance diffuse, le terme source lié au collimaté se scinde lui aussi en une contribution montante et en une contribution descente.

Si $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\text{col}}^+(\tau, \mu, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\mathbf{P}(\tau, \mu, \varphi, \mu_0, \varphi_0) \cdot \bar{L}_c^+(\tau, \mu_0, \varphi_0) + \mathbf{P}(\tau, \mu, \varphi, -\mu_0, \varphi_0) \cdot \bar{L}_c^-(\tau, -\mu_0, \varphi_0) \right] \\ \bar{\sigma}_{\text{col}}^-(\tau, \mu, \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 46}$$

Si $\mu \leq 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\text{col}}^+(\tau, \mu, \varphi) &= 0 \\ \bar{\sigma}_{\text{col}}^-(\tau, \mu, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\mathbf{P}(\tau, \mu, \varphi, \mu_0, \varphi_0) \cdot \bar{L}_c^+(\tau, \mu_0, \varphi_0) + \mathbf{P}(\tau, \mu, \varphi, -\mu_0, \varphi_0) \cdot \bar{L}_c^-(\tau, -\mu_0, \varphi_0) \right] \end{aligned} \quad \text{Eq. 47}$$

Quel que soit μ :

$$\bar{\sigma}_T^\pm(\tau, \mu, \varphi) = (1 - \omega) \cdot L^0(T) \quad \text{Eq. 48}$$

- **Formulation matricielle**

L'Eq. 45 s'écrit sous forme matricielle en remplaçant les intégrales par l'opérateur \bar{Q}^{ij} et en regroupant les termes sources $\bar{\sigma}_{\text{col}}^\pm$ et $\bar{\sigma}_T^\pm$ au sein d'un terme source global noté $\bar{\sigma}^\pm = \omega \cdot \bar{\sigma}_{\text{col}}^\pm + \bar{\sigma}_T^\pm$.

$$\begin{pmatrix} 1 - \mu \frac{\partial}{\partial \tau} & 0 \\ 0 & 1 - \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{L}_d^+ \\ \vec{L}_d^- \end{pmatrix} = \omega \cdot \begin{pmatrix} \vec{Q}^{++} & \vec{Q}^{+-} \\ \vec{Q}^{-+} & \vec{Q}^{--} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{L}_d^+ \\ \vec{L}_d^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{\sigma}^+ \\ \vec{\sigma}^- \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 49}$$

soit :

$$\mathbf{A} \cdot \vec{L}_d = \omega \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{L}_d + \vec{\sigma} \quad \text{Eq. 50}$$

Cette notation matricielle est un avantage numérique pour l'utilisation de méthodes de résolution telles que l'*adding-doubling*. Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{Q} , ainsi que les termes sources $\vec{\sigma}$ sont calculés indépendamment de la luminance diffuse.

2.3.3 CALCUL DES MATRICES DES DIFFUSION

- **Rotation de la matrice de diffusion**

Dans nos calculs, il est nécessaire d'exprimer la matrice de diffusion \mathbf{P} en tenant compte de la rotation des axes de polarisation qui a lieu avant et après le processus de diffusion. Nous avons déjà introduit ces notions lors de la présentation du formalisme de Stokes (*cf.* chapitre I). Les vecteurs de Stokes incident et diffusé sont projetés selon les axes de polarisation \vec{u}_p et \vec{u}_s perpendiculaires au vecteur de propagation. Le vecteur polarisation \vec{u}_p appartient au plan méridien où φ est constant. Le calcul de la diffusion^[42] est toujours effectué dans le plan de diffusion (surface grisée sur la Figure 10). Pour calculer le vecteur de Stokes diffusé en un point, une rotation d'angle σ_1 est nécessaire pour rendre \vec{u}_p coplanaire au plan de diffusion. La matrice de phase est alors appliquée au vecteur incident. Une dernière rotation d'angle σ_2 permet de ramener le vecteur \vec{u}_p dans le plan méridien du vecteur diffusé (défini par φ').

Mathématiquement, ces rotations reviennent à multiplier la matrice de Mueller \mathbf{M} par des matrices de rotation notées $\mathbf{L}(\sigma)$. La matrice de phase est alors transformée en matrice de diffusion \mathbf{P} par la relation suivante :

$$\mathbf{P}(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \mathbf{L}(\sigma_2 - \pi) \cdot \mathbf{M}(\cos \Theta) \cdot \mathbf{L}(\sigma_1) \quad \text{Eq. 51}$$

Les angles Θ , σ_1 et σ_2 sont déterminés à partir de la trigonométrie sphérique :

$$\text{Si } \sin \Theta \neq 0 : \begin{cases} \cos \Theta = \mu' \mu + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi' - \varphi) \\ \cos \sigma_1 = \frac{\mu' - \mu \cdot \cos \Theta}{\sqrt{1 - \mu^2} \cdot \sin \Theta} \\ \cos \sigma_2 = \frac{\mu - \mu' \cdot \cos \Theta}{\sqrt{1 - \mu'^2} \sin \Theta} \end{cases} \quad \text{Eq. 52}$$

$$\text{Si } \sin \Theta = 0 : \begin{cases} \cos \sigma_1 = 1 \\ \cos \sigma_2 = -1 \end{cases}$$

Dans ces conditions, la matrice de passage $\mathbf{L}(\sigma)$ s'exprime simplement en fonction de ces angles :

$$\mathbf{L}(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\sigma & -\sin 2\sigma & 0 \\ 0 & \sin 2\sigma & \cos 2\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 53}$$

La matrice de phase peut être représentée dans une base de polynômes de Legendre. Pour des particules orientées aléatoirement et possédant un plan de symétrie, la matrice de phase se simplifie et est diagonale par blocs (cf. Chapitre I).

$$\mathbf{M}(\mu) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & -M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{ij}(\mu) = \sum_{k=0}^{N_{leg}} \chi_k^{(ij)} \cdot p_k(\mu) \quad \text{Eq. 54}$$

Si les particules étudiées sont des sphères, les relations suivantes sont également vérifiées : $M_{22} = M_{11}$ et $M_{44} = M_{33}$.

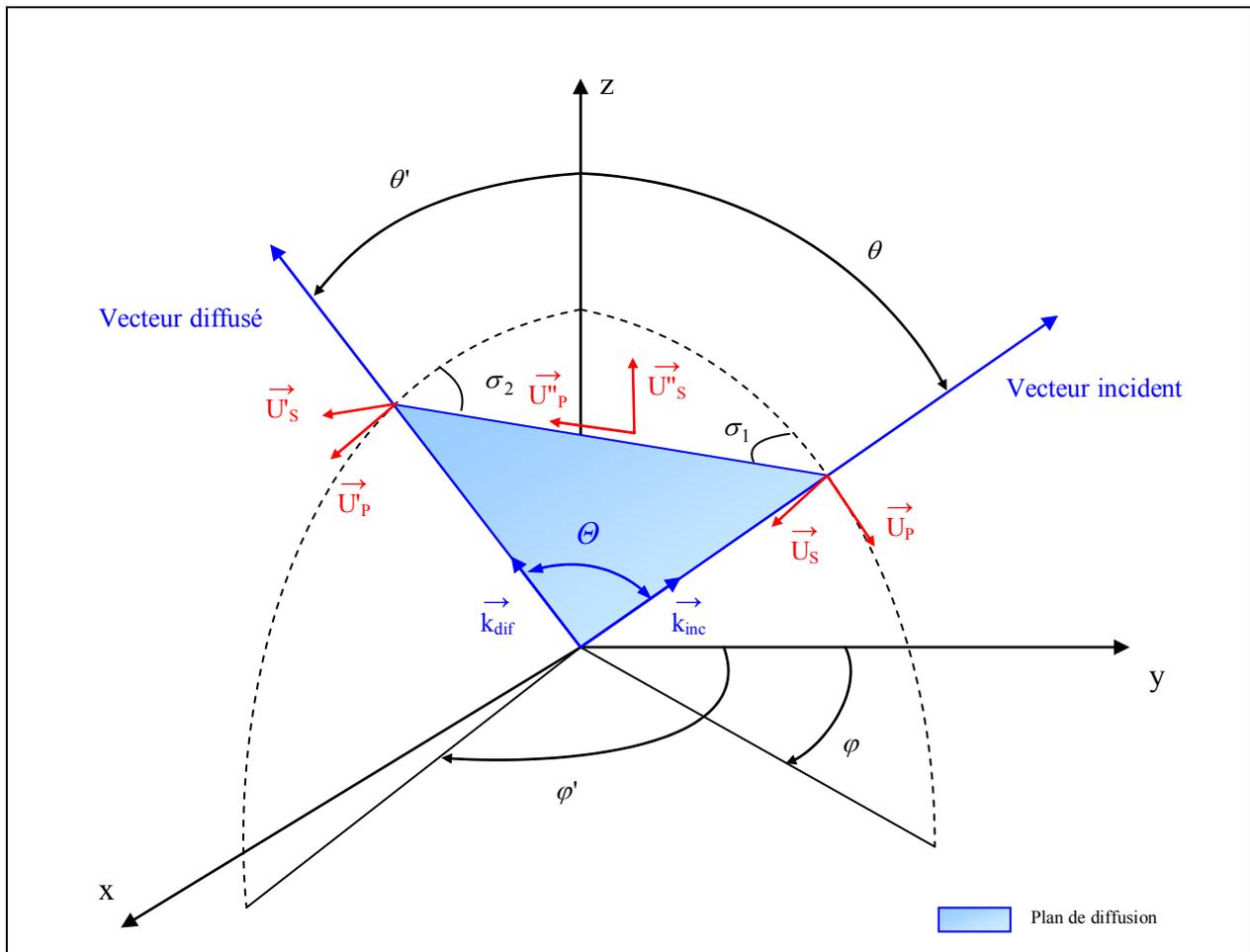


Figure 10 – Rotation des axes de polarisation lors du calcul de la matrice de phase.

La formulation de la matrice de diffusion dépend des angles azimutaux φ et φ' , ou plutôt de la différence positive entre ces deux angles $\varphi' - \varphi$ positif^[42]. La matrice globale \mathbf{P} prenant en compte la rotation des axes de polarisation s'écrit en fonction des variables $C_i = \cos 2\sigma_i$ et $S_i = \sin 2\sigma_i$ où $i = 1; 2$:

$$\mathbf{P}(\mu, \mu', \varphi' - \varphi) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12}C_1 & -M_{12}S_1 & 0 \\ M_{12}C_2 & M_{22}C_1 C_2 - M_{33}S_1 S_2 & -M_{22}S_1 C_2 - M_{33}C_1 S_2 & -M_{34}S_2 \\ M_{12}S_2 & M_{22}C_1 S_2 + M_{33}S_1 C_2 & -M_{22}S_1 S_2 + M_{33}C_1 C_2 & M_{34}C_2 \\ 0 & -M_{34}S_1 & -M_{34}C_1 & M_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 55}$$

2.3.4 CALCUL DES LUMINANCES COLLIMATEES

Comme nous venons de le voir, les termes sources $\bar{\sigma}_{\text{col}}$ font intervenir la luminance collimatée \bar{L}_c . On traite ce vecteur en adoptant la même démarche que celle développée pour la luminance diffuse. Le vecteur \bar{L}_c se sépare en une composante montante et en une composante descendante. Ces différentes contributions se calculent à partir des conditions limites écrites pour les interfaces supérieure et inférieure de chaque couche : elles tiennent compte des éventuelles réflexions multiples. Dans ce qui va suivre, seule une luminance collimatée incidente descendante sera considérée bien que la démarche adoptée puisse être aisément étendue au cas d'une luminance collimatée incidente montante.

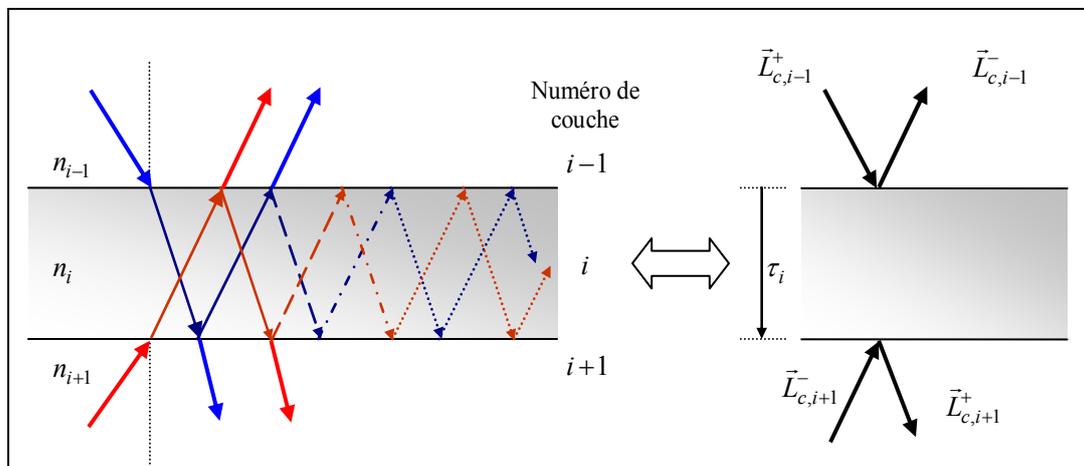


Figure 11 – Présence de réflexions lors du changement de couche avec modification de l'indice optique.

Pour une couche indiquée i , la luminance collimatée est définie par le *cosinus* de l'angle zénithal μ_0^i et par l'angle azimutal φ_0^i . Ces angles se déduisent de proche en proche depuis la direction incidente de la luminance collimatée dans la couche externe (cf. Figure 7) grâce aux relations de Fresnel :

$$n_{\text{ext}} \cdot \sqrt{1 - (\mu_0^{\text{ext}})^2} = n_i \cdot \sqrt{1 - (\mu_0^i)^2} \quad \text{et} \quad \varphi_0^i = \varphi_0^{\text{ext}}.$$

La luminance collimatée incidente doit être corrigée des réflexions multiples par les matrices de réflexion \mathbf{r} et de transmission \mathbf{t} de Fresnel des interfaces (cf. Annexe A) et vérifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}_{c,i+1}^+ = \left(\frac{n_{i-1}}{n_{i+1}} \right)^2 \cdot \frac{\mathbf{t}_{i-1,i} \cdot \mathbf{t}_{i,i+1} \cdot e^{-\tau_i / \mu_0^i}}{\mathbf{1} - \mathbf{r}_{i,i+1} \cdot \mathbf{r}_{i,i-1} \cdot e^{-2\tau_i / \mu_0^i}} \cdot \bar{L}_{c,i-1}^+ + \left(\mathbf{r}_{i+1,i} + \frac{\mathbf{t}_{i+1,i} \cdot \mathbf{r}_{i,i-1} \cdot \mathbf{t}_{i,i+1} \cdot e^{-2\tau_i / \mu_0^i}}{\mathbf{1} - \mathbf{r}_{i,i+1} \cdot \mathbf{r}_{i,i-1} \cdot e^{-2\tau_i / \mu_0^i}} \right) \cdot \bar{L}_{c,i+1}^- \\ \bar{L}_{c,i-1}^- = \left(\frac{n_{i+1}}{n_{i-1}} \right)^2 \cdot \frac{\mathbf{t}_{i+1,i} \cdot \mathbf{t}_{i,i-1} \cdot e^{-\tau_i / \mu_0^i}}{\mathbf{1} - \mathbf{r}_{i,i+1} \cdot \mathbf{r}_{i,i-1} \cdot e^{-2\tau_i / \mu_0^i}} \cdot \bar{L}_{c,i+1}^- + \left(\mathbf{r}_{i-1,i} + \frac{\mathbf{t}_{i-1,i} \cdot \mathbf{r}_{i,i+1} \cdot \mathbf{t}_{i,i-1} \cdot e^{-2\tau_i / \mu_0^i}}{\mathbf{1} - \mathbf{r}_{i,i+1} \cdot \mathbf{r}_{i,i-1} \cdot e^{-2\tau_i / \mu_0^i}} \right) \cdot \bar{L}_{c,i-1}^+ \end{array} \right. \quad \text{Eq. 56}$$

où $\bar{L}_{c,i-1}^\pm$ et $\bar{L}_{c,i+1}^\pm$ sont respectivement les luminances collimatées montante et descendante en bas la couche $i-1$ et en haut de la couche $i+1$. Réécrivons l'équation précédente sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}_{c,i+1}^+ = \mathbf{T}_c^+(i) \cdot \bar{L}_{c,i-1}^+ + \mathbf{R}_c^-(i) \cdot \bar{L}_{c,i+1}^- \\ \bar{L}_{c,i-1}^- = \mathbf{T}_c^-(i) \cdot \bar{L}_{c,i+1}^- + \mathbf{R}_c^+(i) \cdot \bar{L}_{c,i-1}^+ \end{array} \right. \quad \text{Eq. 57}$$

Les luminances d'intérêt pour le calcul des sources collimatées dans la couche i (nous reviendrons sur ce point ultérieurement) sont la luminance montante en bas et descendante en haut de cette couche. Elles se déduisent respectivement des deux systèmes de couches $(i, i+1, i+2)$ et $(i-2, i-1, i)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}_{c,i+2}^+ = \mathbf{T}_c^+(i+1) \cdot \bar{L}_{c,i}^+ + \mathbf{R}_c^-(i+1) \cdot \bar{L}_{c,i+2}^- \\ \bar{L}_{c,i}^- = \mathbf{T}_c^-(i+1) \cdot \bar{L}_{c,i+2}^- + \mathbf{R}_c^+(i+1) \cdot \bar{L}_{c,i}^+ \\ \bar{L}_{c,i}^+ = \mathbf{T}_c^+(i-1) \cdot \bar{L}_{c,i-2}^+ + \mathbf{R}_c^-(i-1) \cdot \bar{L}_{c,i}^- \\ \bar{L}_{c,i-2}^- = \mathbf{T}_c^-(i-1) \cdot \bar{L}_{c,i}^- + \mathbf{R}_c^+(i-1) \cdot \bar{L}_{c,i-2}^+ \end{array} \right. \quad \text{Eq. 58}$$

Posons les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{L}_{c,k+1}^+ = \mathbf{T}_c^+(0, k) \cdot \bar{L}_{c,0}^+ + \mathbf{R}_c^-(0, k) \cdot \bar{L}_{c,k+1}^- \\ \bar{L}_{c,0}^- = \mathbf{T}_c^-(0, k) \cdot \bar{L}_{c,k+1}^- + \mathbf{R}_c^+(0, k) \cdot \bar{L}_{c,0}^+ \end{array} \right. \quad \text{Eq. 59}$$

En utilisant les relations d'*adding*^[69], on démontre que les matrices $\mathbf{T}_c^\pm(0, k)$ et $\mathbf{R}_c^\pm(0, k)$ vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_c^-(0, k) = \frac{\mathbf{T}_c^-(k) \cdot \mathbf{T}_c^-(0, k-1)}{\mathbf{1} - \mathbf{R}_c^-(k) \cdot \mathbf{R}_c^+(0, k-1)} \\ \mathbf{T}_c^+(0, k) = \frac{\mathbf{T}_c^+(0, k-1) \cdot \mathbf{T}_c^+(k)}{\mathbf{1} - \mathbf{R}_c^+(0, k-1) \cdot \mathbf{R}_c^-(k)} \\ \mathbf{R}_c^+(0, k) = \mathbf{R}_c^+(k) + \frac{\mathbf{T}_c^-(k) \cdot \mathbf{R}_c^+(0, k-1) \cdot \mathbf{T}_c^+(k)}{\mathbf{1} - \mathbf{R}_c^-(k) \cdot \mathbf{R}_c^+(0, k-1)} \\ \mathbf{R}_c^-(0, k) = \mathbf{R}_c^-(0, k-1) + \frac{\mathbf{T}_c^+(0, k-1) \cdot \mathbf{R}_c^-(k) \cdot \mathbf{T}_c^-(0, k-1)}{\mathbf{1} - \mathbf{R}_c^+(0, k-1) \cdot \mathbf{R}_c^-(k)} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 60}$$

On calcule alors de proche en proche les matrices sur les l couches du milieu et les luminances collimatées d'intérêt à l'aide des relations précédentes. Le calcul est initialisé à l'aide des conditions limites suivantes où F_{ext} représente le flux incident externe et $(I_0, Q_0, U_0, V_0)^T$ le vecteur de Stokes incident.

$$\begin{cases} \bar{L}_{c,0}^+ = \frac{F_{ext}}{4\pi \cdot \mu_0} \cdot (I_0, Q_0, U_0, V_0)^T \\ \bar{L}_{c,l+1}^- = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 61}$$

2.3.5 DEVELOPPEMENT EN SERIE ET PROCESSUS DE DIFUSION

Si la diffusion est anisotrope, le champ diffus ne présente pas de symétrie azimutale. Pour isoler la dépendance azimutale dans l'ETRP, Chandrasekhar^[34] et Özisik^[53] ont proposé la décomposition de la luminance diffuse $\bar{L}_d(\tau, \mu, \varphi)$ en termes de série de Fourier en *sinus* (notation s) et en *cosinus* (notation c) autour de l'angle d'azimut φ par rapport au plan d'incidence φ_0 :

$$\bar{L}_d^\pm(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{L}_{d,m}^{c,\pm}(\tau, \mu) \cdot \cos m(\varphi - \varphi_0) + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{L}_{d,m}^{s,\pm}(\tau, \mu) \cdot \sin m(\varphi - \varphi_0) \quad \text{Eq. 62}$$

Comme nous l'avons déjà vu, l'angle zénithal est discrétisé en utilisant une quadrature numérique. La variation angulaire azimutale est donnée par sa décomposition en série de Fourier : le calcul du vecteur de Stokes diffusé est séparé en φ problèmes indépendants. Les termes sources collimatés et la matrice de diffusion sont également décomposés dans l'espace de Fourier en *sinus* et en *cosinus* :

$$\bar{\sigma}_{col}^\pm(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\sigma}_{col,m}^{c,\pm}(\tau, \mu) \cdot \cos m(\varphi - \varphi_0) + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\sigma}_{col,m}^{s,\pm}(\tau, \mu) \cdot \sin m(\varphi - \varphi_0) \quad \text{Eq. 63}$$

et

$$\mathbf{P}(\tau, \mu, \mu', \varphi, \varphi') = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}_m^c(\tau, \mu, \mu') \cdot \cos m(\varphi - \varphi') + \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}_m^s(\tau, \mu, \mu') \cdot \sin m(\varphi - \varphi') \quad \text{Eq. 64}$$

Le terme source thermique étant isotrope, seul l'ordre $m=0$ est à considérer et n'intervient que pour la composante en *cosinus*. En incorporant l'Eq. 62, l'Eq. 63 et l'Eq. 64 dans l'Eq. 45, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{L}_{d,m}^{c,+}(\tau, \mu) &= -\bar{L}_{d,m}^{c,+}(\tau, \mu) + \omega \cdot \bar{\sigma}_{m,col}^{c,+}(\tau, \mu) + \bar{\sigma}_T^+(\tau, \mu) \cdot \delta_{0m} \\ &+ \frac{\omega}{4} \cdot \left[\int_0^1 \left(\left\{ \mathbf{P}_m^c(\tau, \mu, \mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{c,+}(\tau, \mu') + \mathbf{P}_m^c(\tau, \mu, -\mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{c,-}(\tau, -\mu') \right\} \cdot (1 + \delta_{0m}) \right) \cdot d\mu' \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{L}_{d,m}^{c,-}(\tau, \mu) &= -\bar{L}_{d,m}^{c,-}(\tau, \mu) + \omega \cdot \bar{\sigma}_{m,col}^{c,-}(\tau, \mu) + \bar{\sigma}_T^-(\tau, \mu) \cdot \delta_{0m} \\ &+ \frac{\omega}{4} \cdot \left[\int_{-1}^0 \left(\left\{ \mathbf{P}_m^c(\tau, \mu, -\mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{c,+}(\tau, -\mu') + \mathbf{P}_m^c(\tau, \mu, \mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{c,-}(\tau, \mu') \right\} \cdot (1 + \delta_{0m}) \right) \cdot d\mu' \right] \end{aligned}$$

Eq. 65

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{L}_{d,m}^{s,+}(\tau, \mu) &= -\bar{L}_{d,m}^{s,+}(\tau, \mu) + \omega \cdot \bar{\sigma}_{m,col}^{s,+}(\tau, \mu) \\ &+ \frac{\omega}{4} \cdot \left[\int_0^1 \left(\left\{ \mathbf{P}_m^s(\tau, \mu, \mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{c,+}(\tau, \mu') + \mathbf{P}_m^s(\tau, \mu, -\mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{c,-}(\tau, -\mu') \right\} \right) \cdot d\mu' \right] \\ &+ \frac{\omega}{4} \cdot \left[\int_0^1 \left(\left\{ \mathbf{P}_m^c(\tau, \mu, \mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{s,+}(\tau, \mu') + \mathbf{P}_m^c(\tau, \mu, -\mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{s,-}(\tau, -\mu') \right\} \right) \cdot d\mu' \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{L}_{d,m}^{s,-}(\tau, \mu) &= -\bar{L}_{d,m}^{s,-}(\tau, \mu) + \omega \cdot \bar{\sigma}_{m,col}^{s,-}(\tau, \mu) \\ &+ \frac{\omega}{4} \cdot \left[\int_{-1}^0 \left(\left\{ \mathbf{P}_m^s(\tau, \mu, \mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{c,+}(\tau, \mu') + \mathbf{P}_m^s(\tau, \mu, -\mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{c,-}(\tau, -\mu') \right\} \right) \cdot d\mu' \right] \\ &+ \frac{\omega}{4} \cdot \left[\int_{-1}^0 \left(\left\{ \mathbf{P}_m^c(\tau, \mu, \mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{s,+}(\tau, \mu') + \mathbf{P}_m^c(\tau, \mu, -\mu') \cdot \bar{L}_{d,m}^{s,-}(\tau, -\mu') \right\} \right) \cdot d\mu' \right] \end{aligned}$$

Dans cette relation qui reste vraie quel que soit le mode (*cosinus* ou *sinus*), l'albédo ω doit appartenir à l'intervalle $[0;1]$ et le *cosinus* des angles de diffusion μ à l'intervalle $[0;1]$.

Les termes sources s'écrivent :

$$\bar{\sigma}_{col,m}^{s,c,\pm}(\tau, \mu) = \frac{\omega}{4\pi} \cdot \left[\mathbf{P}_m^{s,c}(\tau, \mu, \mu_0) \cdot \bar{L}_c^+(\tau, \mu_0) + \mathbf{P}_m^{s,c}(\tau, \mu, -\mu_0) \cdot \bar{L}_c^-(\tau, -\mu_0) \right] \quad \text{Eq. 66}$$

Pour chaque paire d'angles quadratiques (μ_j, μ'_j) et pour différents plans $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi$, les angles Θ sont calculés puis les séries de Legendre sont sommées. On réalise^[58] une transformée de Fourier sur la matrice de diffusion définie dans l'Eq. 55 pour obtenir sa décomposition en *cosinus* et en *sinus* :

$$\mathbf{P}_m^c + i \mathbf{P}_m^s = \frac{2 - \delta_m}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i / N km} \cdot \mathbf{P}(\mu_j, \mu'_j, \Delta\varphi_k) \quad \text{Eq. 67}$$

La matrice $\mathbf{P}(\mu_j, \mu_{j'}, \Delta\varphi_k)$ se réécrit finalement sous la forme de deux contributions :

$$\mathbf{P}_m^c = \begin{bmatrix} P_{11,m}^c & P_{12,m}^c & 0 & 0 \\ P_{21,m}^c & P_{22,m}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33,m}^c & P_{34,m}^c \\ 0 & 0 & P_{43,m}^c & P_{44,m}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1,m}^c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{2,m}^c \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 68}$$

$$\mathbf{P}_m^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{13,m}^s & P_{14,m}^s \\ 0 & 0 & P_{23,m}^s & P_{24,m}^s \\ -P_{31,m}^s & -P_{32,m}^s & 0 & 0 \\ -P_{41,m}^s & -P_{42,m}^s & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_{1,m}^s \\ \mathbf{P}_{2,m}^s & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A partir de l'Eq. 62, on définit les deux vecteurs luminances suivants :

$$\bar{L}_{d,m}^{c,\pm}(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} I_m^{c,\pm} \\ Q_m^{c,\pm} \\ U_m^{c,\pm} \\ V_m^{c,\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{c,\pm} \\ \bar{L}_{2,m}^{c,\pm} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{L}_{d,m}^{s,\pm}(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} I_m^{s,\pm} \\ Q_m^{s,\pm} \\ U_m^{s,\pm} \\ V_m^{s,\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{s,\pm} \\ \bar{L}_{2,m}^{s,\pm} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 69}$$

Les sources collimatées sont données par :

$$\bar{\sigma}_{\text{col},m}^{c,\pm}(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} \sigma_{m,I}^{c,\pm} \\ \sigma_{m,Q}^{c,\pm} \\ \sigma_{m,U}^{c,\pm} \\ \sigma_{m,V}^{c,\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{1,m}^{c,\pm} \\ \bar{\sigma}_{2,m}^{c,\pm} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{\text{col},m}^{s,\pm}(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} \sigma_{m,I}^{s,\pm} \\ \sigma_{m,Q}^{s,\pm} \\ \sigma_{m,U}^{s,\pm} \\ \sigma_{m,V}^{s,\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{1,m}^{s,\pm} \\ \bar{\sigma}_{2,m}^{s,\pm} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 70}$$

En introduisant les Eq. 68 à Eq. 70 dans l'Eq. 65 et en recombinaison les différents termes, l'ETRP se réécrit dans la nouvelle base $(\bar{L}_{1,m}^{c,\pm}, \bar{L}_{2,m}^{c,\pm})$ sous la forme :

$$\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{c,+}(\tau, \mu) \\ \bar{L}_{2,m}^{c,+}(\tau, \mu) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{c,+}(\tau, \mu) \\ \bar{L}_{2,m}^{c,+}(\tau, \mu) \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{1,m}^{c,+}(\tau, \mu) \\ \bar{\sigma}_{2,m}^{c,+}(\tau, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_T^+(\tau, \mu) \cdot \delta_{0m} \\ \bar{0}_3 \end{pmatrix} \\ + \frac{\omega}{4} \cdot \int_0^1 \left(\begin{pmatrix} \mathbf{P}_m(\tau, \mu, \mu') \cdot \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{c,+}(\tau, \mu) \\ \bar{L}_{2,m}^{c,+}(\tau, \mu) \end{pmatrix} + \mathbf{P}_m(\tau, \mu, -\mu') \cdot \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{c,-}(\tau, -\mu) \\ \bar{L}_{2,m}^{c,-}(\tau, -\mu) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right) \cdot d\mu' \quad \text{Eq. 71}$$

$$\mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{c,-}(\tau, \mu) \\ \bar{L}_{2,m}^{c,-}(\tau, \mu) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{c,-}(\tau, \mu) \\ \bar{L}_{2,m}^{c,-}(\tau, \mu) \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{1,m}^{c,-}(\tau, \mu) \\ \bar{\sigma}_{2,m}^{c,-}(\tau, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_T^-(\tau, \mu) \cdot \delta_{0m} \\ \bar{0}_3 \end{pmatrix} \\ + \frac{\omega}{4} \cdot \int_{-1}^0 \left(\begin{pmatrix} \mathbf{P}_m(\tau, \mu, \mu') \cdot \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{c,-}(\tau, \mu) \\ \bar{L}_{2,m}^{c,-}(\tau, \mu) \end{pmatrix} + \mathbf{P}_m(\tau, \mu, -\mu') \cdot \begin{pmatrix} \bar{L}_{1,m}^{c,+}(\tau, -\mu) \\ \bar{L}_{2,m}^{c,+}(\tau, -\mu) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right) \cdot d\mu'$$

$${}^c \vec{0}_3 = (0,0,0)^T \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_m(\mu_j, \mu_{j'}) = (1 + \delta_{0m}) \begin{pmatrix} P_{11,m}^c & P_{12,m}^c & P_{13,m}^s & P_{14,m}^s \\ P_{21,m}^c & P_{22,m}^c & P_{23,m}^s & P_{24,m}^s \\ -P_{31,m}^s & -P_{32,m}^s & P_{33,m}^c & P_{34,m}^c \\ -P_{41,m}^s & -P_{42,m}^s & P_{43,m}^c & P_{44,m}^c \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1,m}^c & \mathbf{P}_{1,m}^s \\ \mathbf{P}_{2,m}^c & \mathbf{P}_{2,m}^s \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 72}$$

On remarquera que les termes en *sinus* sont nuls lorsque $m = 0$ et que le terme en *cosinus* $\mathbf{P}_{2,m}^c$ n'intervient pas à l'ordre 0 (car $\vec{L}_{2,m}^{s,\pm} = \vec{0}$ pour $m = 0$). Il est donc possible de mettre $(1 + \delta_{0m})$ en facteur dans l'Eq. 72. La relation complémentaire à l'Eq. 71 dans la base $(\vec{L}_{1,m}^{s,\pm}, \vec{L}_{2,m}^{c,\pm})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{Bmatrix} \vec{L}_{1,m}^{s,+}(\tau, \mu) \\ \vec{L}_{2,m}^{c,+}(\tau, \mu) \end{Bmatrix} &= - \begin{Bmatrix} \vec{L}_{1,m}^{s,+}(\tau, \mu) \\ \vec{L}_{2,m}^{c,+}(\tau, \mu) \end{Bmatrix} + \omega \cdot \begin{Bmatrix} \vec{\sigma}_{1,m}^{s,+}(\tau, \mu) \\ \vec{\sigma}_{2,m}^{c,+}(\tau, \mu) \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{\omega}{4} \cdot \int_0^1 \left\{ \mathbf{P}_m(\tau, \mu, \mu') \cdot \begin{Bmatrix} \vec{L}_{1,m}^{s,+}(\tau, \mu) \\ \vec{L}_{2,m}^{c,+}(\tau, \mu) \end{Bmatrix} + \mathbf{P}_m(\tau, \mu, -\mu') \cdot \begin{Bmatrix} \vec{L}_{1,m}^{s,-}(\tau, -\mu) \\ \vec{L}_{2,m}^{c,-}(\tau, -\mu) \end{Bmatrix} \right\} \cdot d\mu' \end{aligned} \quad \text{Eq. 73}$$

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{Bmatrix} \vec{L}_{1,m}^{s,-}(\tau, \mu) \\ \vec{L}_{2,m}^{c,-}(\tau, \mu) \end{Bmatrix} &= - \begin{Bmatrix} \vec{L}_{1,m}^{s,-}(\tau, \mu) \\ \vec{L}_{2,m}^{c,-}(\tau, \mu) \end{Bmatrix} + \omega \cdot \begin{Bmatrix} \vec{\sigma}_{1,m}^{s,-}(\tau, \mu) \\ \vec{\sigma}_{2,m}^{c,-}(\tau, \mu) \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{\omega}{4} \cdot \int_{-1}^0 \left\{ \mathbf{P}_m(\tau, \mu, \mu') \cdot \begin{Bmatrix} \vec{L}_{1,m}^{s,-}(\tau, \mu) \\ \vec{L}_{2,m}^{c,-}(\tau, \mu) \end{Bmatrix} + \mathbf{P}_m(\tau, \mu, -\mu') \cdot \begin{Bmatrix} \vec{L}_{1,m}^{s,+}(\tau, -\mu) \\ \vec{L}_{2,m}^{c,+}(\tau, -\mu) \end{Bmatrix} \right\} \cdot d\mu' \end{aligned}$$

La luminance collimatée décomposée dans l'espace de Fourier peut s'écrire telle que :

$$\vec{L}_{\text{col}}^{\pm}(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{L}_{\text{col},m}^{c,\pm}(\tau, \mu) \cdot \cos m(\varphi - \varphi_0) + \sum_{m=0}^{\infty} \vec{L}_{\text{col},m}^{s,\pm}(\tau, \mu) \cdot \sin m(\varphi - \varphi_0) \quad \text{Eq. 74}$$

Comme précédemment, posons :

$$\vec{L}_{\text{col},m}^{c,\pm}(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} \vec{L}_{\text{col},1,m}^{c,\pm} \\ \vec{L}_{\text{col},2,m}^{c,\pm} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{L}_{\text{col},m}^{s,\pm}(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} \vec{L}_{\text{col},1,m}^{s,\pm} \\ \vec{L}_{\text{col},2,m}^{s,\pm} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 75}$$

Les termes sources collimatés intervenant dans l'Eq. 71 et l'Eq. 73 s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \vec{\sigma}_{1,m}^{c,s,\pm}(\tau, \mu) \\ \vec{\sigma}_{2,m}^{c,s,\pm}(\tau, \mu) \end{Bmatrix} = \frac{\omega}{4\pi} \cdot \left[\mathbf{P}_m(\tau, \mu, \mu_0) \cdot \begin{pmatrix} \vec{L}_{\text{col},1,m}^{c,s,+} \\ \vec{L}_{\text{col},2,m}^{c,s,+} \end{pmatrix}(\tau, \mu_0) + \mathbf{P}_m(\tau, \mu, -\mu_0) \cdot \begin{pmatrix} \vec{L}_{\text{col},1,m}^{c,s,-} \\ \vec{L}_{\text{col},2,m}^{c,s,-} \end{pmatrix}(\tau, -\mu_0) \right] \quad \text{Eq. 76}$$

Comme la luminance collimatée est définie uniquement dans le plan $\varphi = \varphi_0$ et que $\vec{L}_{\text{col},m}^{s,+} = \vec{0}$, seules les contributions en *cosinus* sont à considérer. Si le vecteur de Stokes incident est de la forme $(I_{\text{inc}}, Q_{\text{inc}}, 0, 0)^T$, la décomposition de la luminance décrite par l'Eq. 71 dans la base $(\vec{L}_{1,m}^{c,\pm}, \vec{L}_{2,m}^{s,\pm})$ est suffisante.

On a alors :

$$\vec{L}_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \begin{pmatrix} I_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m^{c,\pm}(\tau, \mu) \cdot \cos m(\varphi - \varphi_0) \\ Q_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^{c,\pm}(\tau, \mu) \cdot \cos m(\varphi - \varphi_0) \\ U_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m^{s,\pm}(\tau, \mu) \cdot \sin m(\varphi - \varphi_0) \\ V_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m^{s,\pm}(\tau, \mu) \cdot \sin m(\varphi - \varphi_0) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 77}$$

Si le vecteur de Stokes incident est de la forme $(0, 0, U_{inc}, V_{inc})^T$, on effectue les calculs dans la deuxième base notée $(\vec{L}_{1,m}^{s,\pm}, \vec{L}_{2,m}^{c,\pm})$. Le calcul de la luminance diffuse est donné par l'Eq. 78.

$$\vec{L}_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \begin{pmatrix} I_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m^{s,\pm}(\tau, \mu) \cdot \sin m(\varphi - \varphi_0) \\ Q_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^{s,\pm}(\tau, \mu) \cdot \sin m(\varphi - \varphi_0) \\ U_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m^{c,\pm}(\tau, \mu) \cdot \cos m(\varphi - \varphi_0) \\ V_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m^{c,\pm}(\tau, \mu) \cdot \cos m(\varphi - \varphi_0) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 78}$$

Dans le cas d'une polarisation quelconque $(I_{inc}, Q_{inc}, U_{inc}, V_{inc})^T$, les calculs sont faits indépendamment dans les deux bases (*cosinus* et *sinus*) puis, les résultats sont sommés. Cette opération allonge les temps de calcul et n'est pas très favorable lors de l'utilisation de méthodes d'optimisation. Pour tout le reste de ce mémoire, nous considérons le cas d'une polarisation incidente non polarisée ou de type rectiligne croisé. Dans ces conditions, seuls I_{inc} et Q_{inc} sont non nuls.

Le vecteur de Stokes diffusé (*cf.* Eq. 79) est observé dans son intégralité. Il permet de reconstituer les *BRDF-BTDF* telles qu'elles sont définies dans le chapitre I, en sortie du milieu 1D et pour un éclairage incident à l'interface supérieure dont l'état de polarisation est de la forme $(I_{inc}, Q_{inc}, 0, 0)^T$.

$$\vec{L}_{d,m}^\pm(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} I_{d,m}^{c,\pm}(\tau, \mu) \\ Q_{d,m}^{c,\pm}(\tau, \mu) \\ U_{d,m}^{s,\pm}(\tau, \mu) \\ V_{d,m}^{s,\pm}(\tau, \mu) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 79}$$

L'ETRP est maintenant écrite sous forme matricielle dans l'espace de Fourier, pour une couche homogène quelconque. La méthode de résolution reste valable quel que soit le mode de Fourier (m) considéré. Dans les

paragraphes suivants, nous présentons la méthode retenue basée sur un processus d'*adding-doubling* et calculée pour chaque mode du vecteur luminance.

2.3.6 DESCRIPTION DE LA METHODE DE RESOLUTION PAR *ADDING-DOUBLING*

Au regard des avantages et des inconvénients des diverses méthodes de résolution évoquées dans l'introduction de cette partie, nous avons choisi de résoudre l'ETRP pour chaque mode de Fourier m par *adding-doubling*. Cette méthode étudie les interactions linéaires de la lumière avec le milieu selon le principe d'interaction^[50]. L'*adding-doubling* est facile à mettre en œuvre car on s'intéresse uniquement à l'intégration numérique sur les angles de diffusion. Les résultats sont obtenus pour chacun de ces angles et leur interprétation physique est possible à chaque étape du processus. De conception simple, cette méthode est stable numériquement, même pour des épaisseurs optiques assez grandes. Pour simplifier la modélisation du problème physique, les hypothèses suivantes doivent être faites :

- les phénomènes ondulatoires tels que la diffraction ou les interférences ne sont pas pris en compte,
- le milieu est constitué par des couches successives, d'épaisseur finie et de surfaces infinies,
- l'absorption et la diffusion à l'intérieur de chaque couche est uniforme,
- les sources diffuses sont uniformes à l'intérieur de chaque couche.

Dans un premier temps, les propriétés de toute une couche homogène sont obtenues par *doubling* à partir des propriétés locales d'une couche infinitésimale, pour une longueur d'onde λ donnée. Dans un deuxième temps, la méthode d'*adding* permet de modéliser la juxtaposition de couches ayant des propriétés optiques ou microphysiques différentes.

- **Méthode de *doubling***

Ce premier processus a été développé par van de Hulst^[35] pour résoudre les problèmes de transferts radiatifs. La première étape consiste à générer les matrices de réflexion \mathbf{R} et de transmission \mathbf{T} pour une couche d'épaisseur optique $\Delta\tau$ infinitésimale. Elle doit être petite devant l'angle quadratique minimum μ_{\min} .

On fixe arbitrairement un $\Delta\tau_{\max}$ tel que :

$$\Delta\tau_{\max} \ll \mu_{\min} \quad \text{Eq. 80}$$

Pour la $i^{\text{ème}}$ couche d'épaisseur τ_i , le nombre de sous-couches du *doubling* est défini par la relation suivante :

$$N_{\text{sous-couches}} = 2^{N_{\text{doubling}}} \quad \text{avec} \quad N_{\text{doubling}} = 1 + \text{Int} \left[\log \left(\frac{\max(\tau_i, 10^{-7})}{\Delta\tau_{\max}} \right) \cdot \frac{1}{\log 2} \right] \quad \text{Eq. 81}$$

L'épaisseur optique infinitésimale est finalement donnée par :

$$\Delta\tau = \frac{\tau_i}{N_{\text{sous-couches}}} \quad \text{Eq. 82}$$

Différentes méthodes sont possibles pour initialiser la première sous-couche : l'initialisation dite **diamant**^[55], la **diffusion successive**^[57] ou le **générateur infinitésimal**^[56] souvent noté IGI (*Infinitesimal Generator Initialization*). Nous avons opté pour cette dernière solution car elle est simple à mettre en œuvre et assure une bonne convergence du *doubling*. Le milieu initialement caractérisé par sa matrice de phase (matrice de Mueller) est considéré comme étant suffisamment fin pour que la diffusion multiple y soit négligeable.

La détermination des matrices locales \mathbf{R} et \mathbf{T} en diffusion simple est donnée par van de Hulst^[35]. Ces matrices sont reliées à la matrice de diffusion par l'Eq. 83. Les termes sources $\bar{\sigma}$ sont également initialisés dans la génération de cette couche infinitésimale.

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{T}_0^\pm \right|_{ij'j'} &= \delta_{ii'} \delta_{jj'} - \frac{\Delta\tau}{\mu_j} \cdot \left(\delta_{ii'} \delta_{jj'} - \frac{\omega}{4} \cdot \rho_{j'} \right) \left| \mathbf{P}_m(\pm\mu_j, \pm\mu_{j'}) \right|_{ii'} \\ \left| \mathbf{R}_0^\pm \right|_{ij'j'} &= \frac{\Delta\tau}{\mu_j} \cdot \frac{\omega}{4} \cdot \rho_{j'} \left| \mathbf{P}_m(\pm\mu_j, \mp\mu_{j'}) \right|_{ii'} \\ \left| \bar{\sigma}_0^\pm \right|_{ij} &= \frac{\Delta\tau}{\mu_j} \cdot \left| \bar{\sigma}_m(\pm\mu_j) \right|_i \end{aligned} \quad \text{Eq. 83}$$

où i est l'indice des paramètres de Stokes, j l'indice des angles quadratiques (μ_j) et ρ_j les poids intégrés associés, m le mode de Fourier considéré, $\Delta\tau$ l'épaisseur optique de la couche initiale (eg. 10^{-5}), $\bar{\sigma}_m(\mu_j)$ le terme source de l'ETRP pour le $m^{\text{ième}}$ mode de Fourier et les primes indiquent la sommation lors de la multiplication de matrices.

Par convention pour la méthode IGI, les termes sources descendant et montant sont définis respectivement en haut et en bas de la couche (*i.e.* respectivement pour $\tau = 0$ et $\tau = \tau_i$). Dans le cas du collimaté, les termes sources font donc intervenir la luminance collimatée en haut et en bas de cette couche.

L'épaisseur optique est doublée telle que :

$$\tau_k = 2 \cdot \tau_{k-1} = 2^k \cdot \Delta\tau \quad \text{avec} \quad k \in [0, N_{\text{doubling}}] \quad \text{Eq. 84}$$

De proche en proche, les matrices globales de transmission et de réflexion sont obtenues pour chaque angle quadratique et pour une couche d'épaisseur optique τ . Les propriétés radiatives doivent être constantes à l'intérieur de cette couche. On définit les matrices $\mathbf{\Gamma}_k^+$ et $\mathbf{\Gamma}_k^-$ pour la $k^{\text{ième}}$ itération par :

$$\mathbf{\Gamma}_k^+ = \left(\mathbf{1} - \mathbf{R}_k^+ \cdot \mathbf{R}_k^- \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{\Gamma}_k^- = \left(\mathbf{1} - \mathbf{R}_k^- \cdot \mathbf{R}_k^+ \right)^{-1} \quad \text{Eq. 85}$$

Les termes sources et les matrices de réflexion et transmission pour l'itération $k+1$ font intervenir la relation de récurrence suivante^[48] :

$$\begin{cases}
 \mathbf{R}_{k+1}^+ = \mathbf{R}_k^+ + \mathbf{T}_k^+ \cdot \mathbf{\Gamma}_k^+ \cdot \mathbf{R}_k^+ \cdot \mathbf{T}_k^- \\
 \mathbf{R}_{k+1}^- = \mathbf{R}_k^- + \mathbf{T}_k^- \cdot \mathbf{\Gamma}_k^- \cdot \mathbf{R}_k^- \cdot \mathbf{T}_k^+ \\
 \\
 \mathbf{T}_{k+1}^+ = \mathbf{T}_k^+ \cdot \mathbf{\Gamma}_k^+ \cdot \mathbf{T}_k^+ \\
 \mathbf{T}_{k+1}^- = \mathbf{T}_k^- \cdot \mathbf{\Gamma}_k^- \cdot \mathbf{T}_k^- \\
 \\
 \bar{\sigma}_{k+1}^+ = \bar{\sigma}_k^+ \cdot e^{-\Delta\tau/\mu_0} + \mathbf{T}_k^+ \cdot \mathbf{\Gamma}_k^+ \cdot (\bar{\sigma}_k^+ + \mathbf{R}_k^+ \cdot e^{-\Delta\tau/\mu_0} \cdot \bar{\sigma}_k^-) \\
 \bar{\sigma}_{k+1}^- = \bar{\sigma}_k^- + \mathbf{T}_k^- \cdot \mathbf{\Gamma}_k^- \cdot (e^{-\Delta\tau/\mu_0} \cdot \bar{\sigma}_k^- + \mathbf{R}_k^- \cdot \bar{\sigma}_k^+)
 \end{cases}
 \tag{Eq. 86}$$

On remarquera que si la diffusion multiple est négligeable, des approximations sont faites pour simplifier le calcul et ne tenir compte que de la diffusion simple. Si le milieu est optiquement fin, la procédure de *doubling* équivaut à la méthode d'Ambartsumian^[51]. Il suffit maintenant de généraliser cette procédure aux l couches homogènes constituant le milieu en prenant en compte les interfaces. Pour cela, une méthode de type *adding* est utilisée.

- **Méthode d'adding**

Les travaux de van de Hulst^[35] sur la méthode de *doubling* ont été améliorés pour tenir compte de l'addition de couches non équivalentes^[54] : la juxtaposition de plusieurs couches homogènes est réalisée par *adding*. Chaque couche homogène indiquée i est caractérisée par ses matrices \mathbf{R}_i^\pm , \mathbf{T}_i^\pm et son vecteur source $\bar{\sigma}_i^\pm$ calculés par *doubling*. Si cette couche est non diffusante, les sources sont nulles. Pour prendre en compte un changement d'indice, on insère une couche virtuelle d'épaisseur optique nulle entre deux couches homogènes (*cf.* Figure 12).

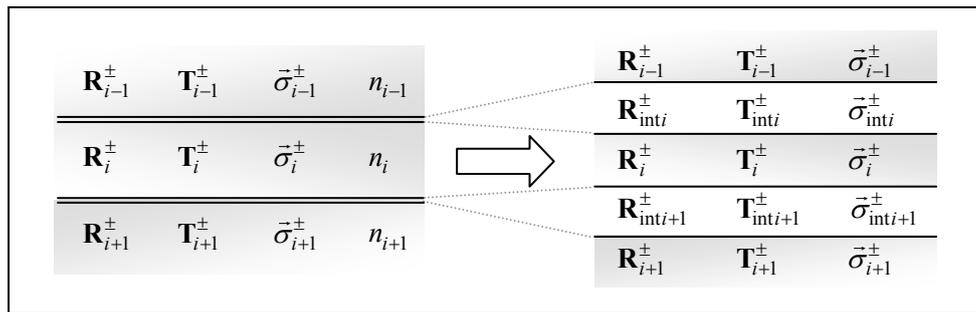


Figure 12 – Changement d'indice entre deux couches homogènes.

L'adaptation au formalisme développé jusqu'à présent est rendue possible si on introduit les matrices d'interface \mathbf{R}_{int} et \mathbf{T}_{int} . Elles sont calculées pour tous les angles de la quadrature et sont valables quel que soit le mode de Fourier considéré. Les matrices de cette nouvelle couche sont définies à partir des matrices de Fresnel (\mathbf{r} et \mathbf{t}) données en annexe :

$$\begin{aligned}
\left| \mathbf{T}_{\text{int}}^{\pm} \right|_{jj'j'} &= \delta_{jj'} \left| \mathbf{t}_{\text{int}}(\pm\mu_j) \right|_{ii'} \\
\left| \mathbf{R}_{\text{int}}^{\pm} \right|_{jj'j'} &= \delta_{jj'} \left| \mathbf{r}_{\text{int}}(\pm\mu_j) \right|_{ii'} \\
\left| \bar{\sigma}_{\text{int}}^{\pm} \right|_{ij} &= \bar{0}
\end{aligned}
\tag{Eq. 87}$$

où i est l'indice des paramètres de Stokes, j est l'indice des angles quadratiques (donnés pour l'interface supérieure) et les primes indiquent la sommation lors de la multiplication de matrices.

Le milieu considéré est constitué par l couches homogènes et par $l+1$ interfaces. Il est donc décrit par $2 \cdot l + 1$ matrices ou vecteurs sources. A titre d'exemple, nous pouvons représenter la succession de ces $2 \cdot l + 1$ couches telles que :

$$\mathbf{R}_{\text{int}1}^1, \mathbf{R}_{\text{couche}1}^2, \mathbf{R}_{\text{int}2}^3, \mathbf{R}_{\text{couche}2}^4, \mathbf{R}_{\text{int}3}^5, \mathbf{R}_{\text{couche}3}^6, \dots, \mathbf{R}_{\text{int}i}^{2i-1}, \mathbf{R}_{\text{couche}i}^{2i}, \dots, \mathbf{R}_{\text{int}l}^{2l-1}, \mathbf{R}_{\text{couche}l}^{2l}, \mathbf{R}_{\text{int}l+1}^{2l+1}
\tag{Eq. 88}$$

Pour simplifier, nous omettons dans ce qui va suivre les indices liés à la nature de la couche (interface ou couche homogène). Nous posons \mathbf{R}_k^{\pm} , \mathbf{T}_k^{\pm} et $\bar{\sigma}_k^{\pm}$ comme étant respectivement les matrices \mathbf{R} , \mathbf{T} et le vecteur source d'une couche $k \in [1; 2l+1]$. On remarquera que cette démarche reste vraie lorsque les indices sont constants entre deux couches homogènes : seules les matrices \mathbf{R}_{int} et \mathbf{T}_{int} se simplifient en étant respectivement nulle et égale à la matrice identité.

Dans le paragraphe précédent, nous avons déjà exposé les relations reliant les luminances collimatées montantes et descendantes aux matrices \mathbf{R}_k^{\pm} et \mathbf{T}_k^{\pm} . Ces relations se généralisent aux luminances diffuses et intègrent les termes sources (*cf.* Figure 13) :

$$\begin{aligned}
\bar{L}_1^+ &= \mathbf{T}^+ \bar{L}_0^+ + \mathbf{R}^- \bar{L}_1^- + \bar{\sigma}_1^+ \\
\bar{L}_1^- &= \mathbf{R}^+ \bar{L}_0^+ + \mathbf{T}^- \bar{L}_1^- + \bar{\sigma}_1^-
\end{aligned}
\tag{Eq. 89}$$

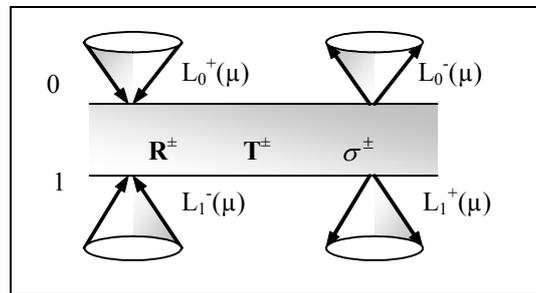


Figure 13 – Schéma général du principe d'interaction.

La procédure d'*adding* calcule les matrices globales de réflexion et de transmission et le vecteur source associé. Posons $\mathbf{S}^{\pm}(1,k)$ la matrice ou le vecteur équivalent correspondant au sous-système constitué de la couche 1 à la

couche k . On utilise les relations de récurrence suivantes pour calculer les matrices $\mathbf{R}^\pm(1,k)$, $\mathbf{T}^\pm(1,k)$ et le vecteur source $\bar{\sigma}^\pm(1,k)$:

$$\begin{cases} \mathbf{T}^+(1,k) = \mathbf{T}_k^+ \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{R}^+(1,k-1) \cdot \mathbf{R}_k^- \right)^{-1} \cdot \mathbf{T}^+(1,k-1) \\ \mathbf{T}^-(1,k) = \mathbf{T}^-(1,k-1) \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{R}_k^- \cdot \mathbf{R}^+(1,k-1) \right)^{-1} \cdot \mathbf{T}_k^- \\ \mathbf{R}^+(1,k) = \mathbf{R}_k^+ + \mathbf{T}_k^+ \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{R}_k^- \cdot \mathbf{R}^+(1,k-1) \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}^+(1,k-1) \cdot \mathbf{T}_k^+ \\ \mathbf{R}^-(1,k) = \mathbf{R}^-(1,k-1) + \mathbf{T}^-(1,k-1) \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{R}^+(1,k-1) \cdot \mathbf{R}_k^- \right)^{-1} \cdot \mathbf{R}_k^- \cdot \mathbf{T}^-(1,k-1) \\ \bar{\sigma}^+(1,k) = \bar{\sigma}_k^+ + \mathbf{T}_k^+ \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{R}^+(1,k-1) \cdot \mathbf{R}_k^- \right)^{-1} \cdot \left(\bar{\sigma}^+(1,k-1) + \mathbf{R}^+(1,k-1) \cdot \bar{\sigma}_k^- \right) \\ \bar{\sigma}^-(1,k) = \bar{\sigma}^-(1,k-1) + \mathbf{T}^-(1,k-1) \cdot \left(\mathbf{1} - \mathbf{R}_k^- \cdot \mathbf{R}^+(1,k-1) \right)^{-1} \cdot \left(\bar{\sigma}_k^- + \mathbf{R}_k^- \cdot \bar{\sigma}^+(1,k-1) \right) \end{cases} \quad \text{Eq. 90}$$

Cette approche se généralise par itérations successives à l'ensemble des $2 \cdot l + 1$ couches et permet d'obtenir par sommations les termes sources $\bar{\sigma}$ et les matrices \mathbf{R} , \mathbf{T} équivalentes du milieu. Les conditions aux limites sont appliquées pour calculer (quel que soit m) la luminance diffusée en utilisant le formalisme de Stokes (cf. Eq. 79). On en déduit la luminance polarisée dans chaque plan azimutal et pour chaque direction zénithale grâce à l'Eq. 77. De proche en proche, l'Eq. 90 permet de calculer les luminances à l'intérieur du milieu, autorisant ainsi un éventuel couplage de la méthode avec la prise en compte de l'équation de la chaleur.

3 TRANSFERT RADIATIF POLARISE EN GEOMETRIE 3D (CODE MC3D)

La prise en compte de géométries multidimensionnelles, de la non-homogénéité des propriétés radiatives du milieu et de conditions limites non-homogènes (interfaces rugueuses par exemple) sont des problèmes où l'approche stochastique peut être privilégiée. Simple à mettre en œuvre, elle s'impose par rapport aux méthodes résolvant l'ETRP numériquement. Pour toutes ces raisons, un code **Monte Carlo** (*MC3D*) résolvant le transfert radiatif polarisé en géométrie 3D cartésienne ou cylindrique est développé. Dans sa configuration cartésienne, il sera utilisé à la fin de ce chapitre pour valider par inter-comparaison l'outil *METROPOL*. Pour les deux géométries, le code *MC3D* sera utilisé pour générer des fonctions d'appareil (incluant le système de mesure) sur des milieux diffusants de références placés dans des cuves plates ou cylindriques. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre IV.

3.1 GENERALITES SUR LES CODES MONTE CARLO

La lumière émise par une source est décomposée en rayons lumineux appelés photons et caractérisés par leur vecteur de propagation \vec{k} et leur vecteur de Stokes. Pour l'approche stochastique, nous avons choisi de nous

placer dans le formalisme de Stokes bien que le formalisme de Jones (en champ électrique) soit envisageable. La source d'éclairage est supposée continue bien que l'outil développé puisse être étendu à une source impulsionnelle.

Les codes Monte-Carlo décrivent statistiquement la trajectoire des photons à l'intérieur d'un milieu diffusant parfaitement caractérisé. Cette description est basée sur le tirage aléatoire de nombres ($0 < x < 1$) et de densités de probabilité. En propageant un vecteur de Stokes lié au photon dans le milieu, on génère les solutions équivalentes de l'ETRP sur un grand nombre d'événements. La lumière polarisée diffusée par le milieu est estimée à partir de l'ensemble de ces événements. Plus le nombre de photons est important, plus le résultat se rapproche de la solution exacte. La figure suivante présente le principe général d'un code Monte Carlo, valable quelle que soit la géométrie du milieu.

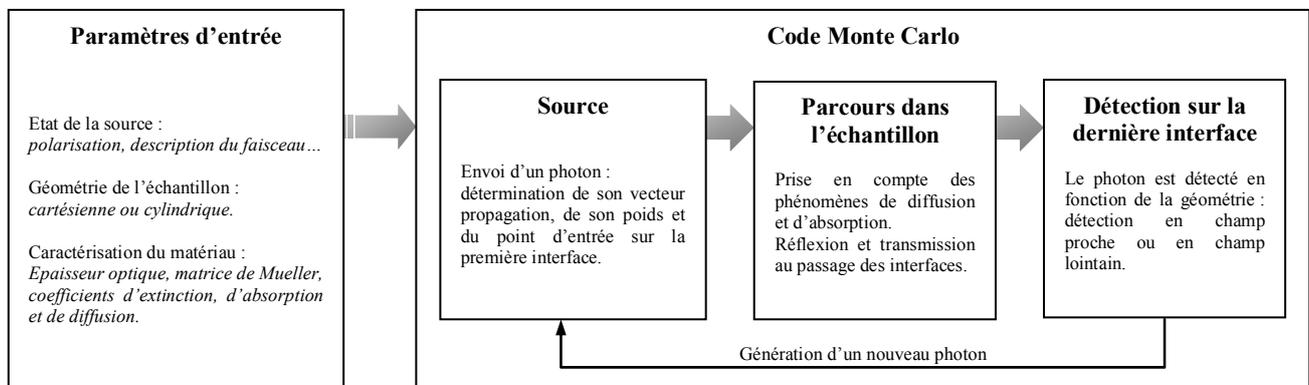


Figure 14 – Schéma de principe des codes Monte Carlo pour l'étude de milieux diffusants.

Avant de propager le photon dans le milieu, la première étape consiste à générer les propriétés radiatives du milieu diffusant à partir des propriétés microphysiques (granulométrie, indices...) et de la géométrie de l'échantillon. L'épaisseur optique, l'albédo, la matrice de Mueller, les coefficients d'extinction, d'absorption et de diffusion sont définis à partir de la théorie de Lorenz-Mie^[68]. Ces grandeurs sont moyennées et considérées comme étant constantes dans un volume dV quelconque.

On associe à chaque photon un vecteur de Stokes et un poids. Expérimentalement, le milieu diffusant est éclairé par un faisceau laser (lumière monochromatique polarisée) formant un angle d'incidence quelconque avec la face d'entrée de l'échantillon. Numériquement, sa modélisation prend plusieurs formes : la source peut être ponctuelle, rectangulaire ou gaussienne. Pour ces deux derniers cas, la position du photon dans le faisceau est tirée aléatoirement. Lorsque le faisceau est gaussien, le poids ρ du photon va dépendre de cette position.

Le traitement en lumière polarisée du passage d'un photon à une interface et sa détection dépendent de la géométrie de l'échantillon. Seuls les phénomènes de collision (absorption ou diffusion) sont indépendants de cette géométrie. Dans notre étude, nous différencions la géométrie cartésienne qui permet de simuler des milieux

parallélépipédiques (équivalent à du 1D si l'épaisseur est petite devant les autres dimensions) et la géométrie cylindrique utilisée pour générer des fonctions d'appareil.

3.2 PRESENTATION DU CODE MONTE CARLO 3D EN GEOMETRIE CARTESIENNE

Un premier code Monte Carlo 3D fonctionnant en géométrie cartésienne (code *MC3D*) modélise la diffusion d'un milieu hétérogène éclairé par une source polarisée. On considère un milieu multicouche identique au code *METROPOL* pour simuler la diffusion d'échantillons tels que les peintures ou les cuves à faces parallèles. Ce code prend en compte la polarisation de la lumière, le changement d'indice entre chaque couche, la diffusion multiple et une géométrie 3D dans un repère absolu cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ comme celui qui est présenté sur la Figure 15a. Il met en évidence les phénomènes de diffusion en utilisant le formalisme de Stokes. Le vecteur polarisation est propagé dans le milieu et permet de retrouver les solutions de l'ETRP.

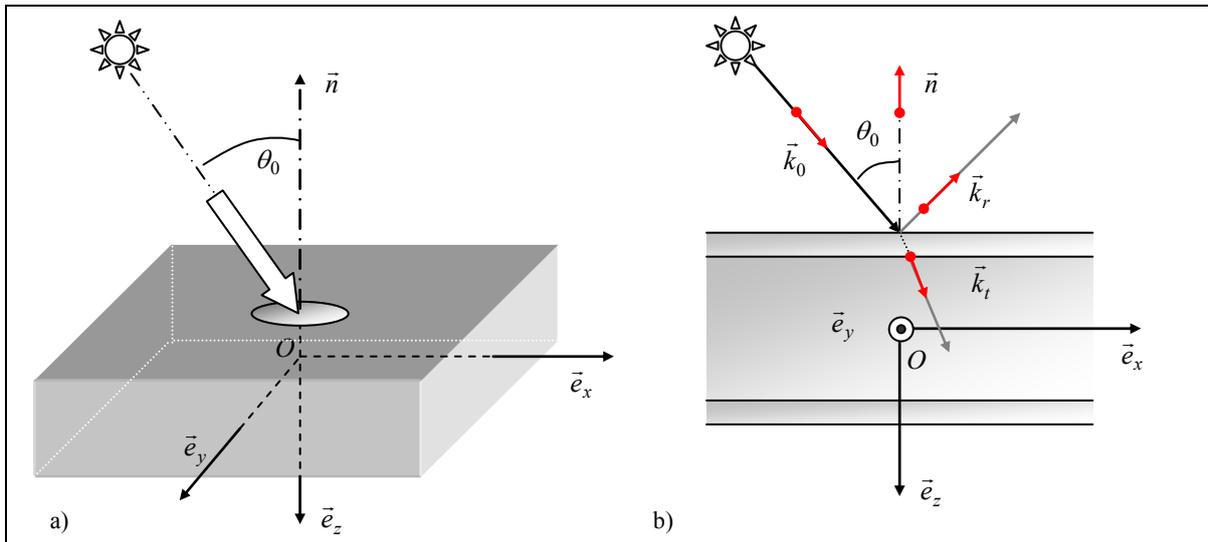


Figure 15 – (a) Définition des axes du repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en géométrie 3D cartésienne et (b) vue en coupe.

- **Définition du système de coordonnées**

Le repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ que nous avons choisi est tel que le vecteur de propagation des photons incidents (\vec{k}_0) soit orienté selon l'axe des Z . Cette notation est volontairement semblable au code de transfert radiatif 1D développé au début de ce chapitre. On remarquera que les plans définissant les différentes couches du milieu sont tous parallèles au plan $(\vec{e}_x, O, \vec{e}_y)$. Dans le repère absolu, tout point M est représenté par ses coordonnées (x_M, y_M, z_M) et tout vecteur \vec{v} par ses coordonnées (v_x, v_y, v_z) .

• **Algorithme du code Monte Carlo 3D en géométrie cartésienne**

Une fois émis, le photon va subir une succession d'événements avant d'interagir avec le milieu diffusant. Il sera absorbé par le milieu ou diffusé puis détecté par un capteur placé autour de l'échantillon. La propagation du photon est liée au tirage de nombres aléatoires et à leur comparaison avec des grandeurs physiques caractérisant le milieu. L'algorithme est détaillé sur la Figure 16 et discuté dans les paragraphes qui suivent.

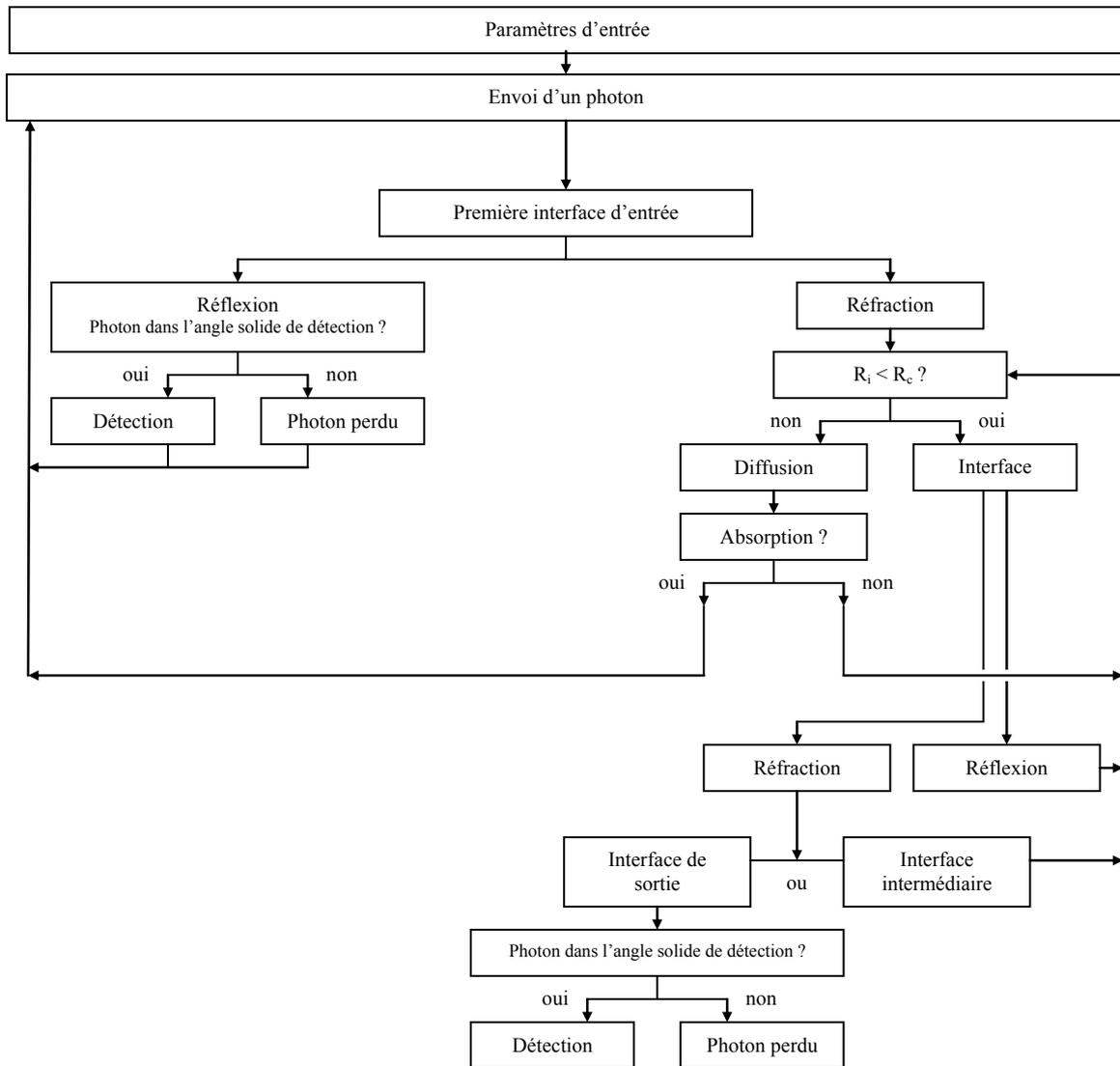


Figure 16 – Schéma de principe du code Monte Carlo 3D en géométrie cartésienne (cas général).

- **Rencontre avec une interface**

Quelles que soient leurs géométries, les interfaces sont définies comme étant des surfaces localement planes où l'on observe un changement de l'indice de réfraction du milieu. D'un point de vue algorithmique, la rencontre d'un photon avec une interface est traitée de façon simple : on détermine l'angle d'éclairement θ en effectuant le produit scalaire entre le vecteur de propagation incident \vec{k} et le vecteur unitaire normal à la surface noté \vec{n} . Dans le cas d'interfaces parallèles au plan $(\vec{e}_x, O, \vec{e}_y)$, l'angle zénithal θ est déterminé par rapport au vecteur unitaire \vec{e}_z (Figure 17). La démarche développée par la suite se généralise aux interfaces latérales dont la normale est fixée par les autres axes du repère.

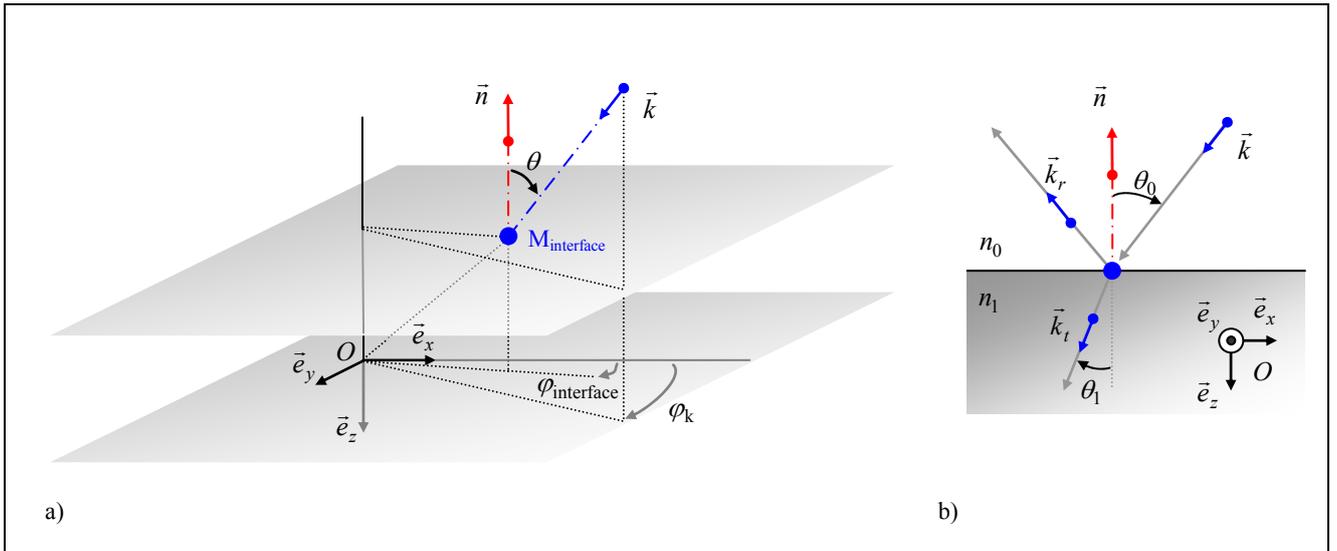


Figure 17 – (a) Définition générale du repère absolu $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et (b) géométrie du passage à une interface en projection 2D dans le plan $(\vec{e}_x, O, \vec{e}_z)$.

Les relations de Snell-Descartes sont appliquées pour déterminer les vecteurs de propagation réfléchis \vec{k}_r , ou transmis \vec{k}_t . Par considérations géométriques (*cf.* Figure 17b), ces vecteurs se réécrivent dans le repère global tels que :

$$\vec{k}_r = \vec{k} + 2 \cdot \cos \theta_0 \cdot \vec{n} \quad \text{Eq. 91}$$

$$\vec{k}_t = \frac{n_0}{n_1} \cdot \vec{k} + \vec{n} \cdot \left(\frac{n_0}{n_1} \cdot \cos \theta_0 - \cos \theta_1 \right)$$

Les *cosinus* utilisés dans l'équation précédente sont obtenus par :

$$\cos \theta_0 = -\vec{k} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \cos \theta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta_0)} \quad \text{Eq. 92}$$

Ces relations sont vérifiées quelles que soient les orientations de la normale et du vecteur incident. Lorsqu'un photon rencontre une interface, il peut être réfléchi ou réfracté à l'intérieur (ou à l'extérieur) de la cuve. Cet événement est choisi aléatoirement en comparant le nombre x à la réflectivité non polarisée (scalaire) de l'interface $R_{\text{interface}}$:

$$R_{\text{interface}} = \frac{1}{2} \cdot (r_s \cdot r_s^* + r_p \cdot r_p^*) \quad \text{Eq. 93}$$

où r_s et r_p sont les coefficients de réflexion de Fresnel définis en annexe. On impose que :

- si $x > R_{\text{interface}}$, le photon est réfracté.
- si $x \leq R_{\text{interface}}$, le photon est réfléchi.

Les vecteurs de Stokes transmis ou réfléchi correspondent à la multiplication du vecteur incident par la matrice \mathbf{r} ou \mathbf{t} normalisée par son premier terme. La modification moyenne de l'intensité est incluse dans le processus du tirage aléatoire. En cas de réfraction, le poids est également modifié en étant multiplié par le rapport des indices $(n_0/n_1)^2$.

On remarquera que lors du passage de la dernière interface (avant détection), il est possible d'effectuer simultanément les deux opérations suivantes pour favoriser les statistiques.

1. Dans un premier temps, le photon est considéré comme étant transmis : son vecteur de Stokes et son poids sont modifiés. La nouvelle valeur du poids tient compte du changement d'indice et a été obtenue en multipliant l'ancien poids par la transmission *i.e.* par $(1 - R_{\text{interface}})$. Le photon est ensuite détecté si son vecteur de propagation est inclus dans le champ de vision du détecteur et dans l'angle solide de collection.
2. Dans un deuxième temps, on suppose que le photon est réfléchi par la dernière interface et qu'il se propage à nouveau dans le milieu. Le vecteur de Stokes est modifié et le poids est multiplié par $R_{\text{interface}}$. On favorise ainsi la diffusion dans des milieux d'épaisseur optique faible.

La modélisation d'une cuve est un cas particulier où le milieu diffusant est entouré par des interfaces en quartz *i.e.* par des milieux non diffusants. Pour diminuer les temps de calcul, nous choisissons de ne pas représenter l'impact des réflexions multiples sur la position du photon lors du passage des interfaces (milieu diffusant, milieu non diffusant, milieu extérieur). Les réflexions multiples dans cette structure sont prises en compte en calculant les matrices de réflexion et de transmission équivalentes. Ces matrices sont ensuite utilisées pour déterminer l'événement (réflexion ou réfraction) ainsi que les vecteurs de Stokes et poids associés au photon.

Si après une interface, le photon se propage dans un milieu diffusant, il subit différents événements de collision ou d'absorption tant qu'il n'a pas atteint une nouvelle interface.

- **Propagation dans le milieu diffusant**

Lorsque le photon est dans le milieu diffusant et qu'il rencontre une particule, on calcule son changement de trajectoire par diffusion à partir des propriétés microphysiques du milieu. Ce calcul nécessite le passage dans le repère lié à la particule puis, par une méthode de réjection des angles, à la projection du vecteur propagation diffusé dans le repère absolu. La procédure de diffusion est répétée tant que le photon ne rencontre pas d'interface.

La première étape consiste à calculer la distance de la plus proche interface R_i à partir d'une position initiale (x, y, z) et des angles θ et φ qui définissent le vecteur de propagation \vec{k} (cf. Figure 18). Pour cela, la nouvelle position du photon ($\vec{M}_{\text{interface}}$) sur la plus proche interface est calculée à partir de sa position initiale et du vecteur \vec{k} . Nous balayons la ligne de visée dans la direction \vec{k} tant qu'aucun changement d'indice n'intervient.

La rencontre avec une interface latérale et les cas limites liés à l'angle de propagation ne sont pas traités. Donc, si une interface est détectée, la distance R_i est en général donnée à partir de la position de cette interface :

$$R_i = \left| \frac{\Delta z}{\vec{k} \cdot \vec{n}} \right| = \left| \frac{z_{\text{interface}} - z}{k_z} \right| \quad \text{Eq. 94}$$

La nouvelle position du photon sur l'interface devient :

$$\vec{M}_{\text{interface}} \begin{cases} x_{\text{interface}} = x + R_i \cdot k_x \\ y_{\text{interface}} = y + R_i \cdot k_y \\ z_{\text{interface}} \end{cases} \quad \text{Eq. 95}$$

Cette distance est comparée à la distance R_c qui est calculée dans la direction de propagation et qui sépare le photon de la plus proche collision avec une particule. Cette grandeur est déterminée numériquement par le tirage d'un nombre aléatoire x et le calcul préalable du coefficient d'extinction monochromatique k_{ext} du milieu traversé :

$$R_c = -\frac{\ln(x)}{k_{\text{ext}}} \quad \text{Eq. 96}$$

La distance R_c dans le milieu diffusant tient compte des différentes couches sans changement d'indice mais pouvant avoir des propriétés radiatives différentes. Dans ce cas, le coefficient d'extinction est moyenné sur l'ensemble des milieux traversés.

Les deux grandeurs R_i et R_c sont comparées pour déterminer l'événement à prendre en compte :

- si $R_c > R_i$, il n'y a pas de collision avec les diffuseurs, le photon atteint la plus proche interface et sa nouvelle position devient $\vec{M}_{\text{interface}}$,
- si $R_c \leq R_i$, il y a diffusion ou absorption du photon dont la nouvelle position est $\vec{M} \leftarrow \vec{M} + R_c \cdot \vec{k}$.

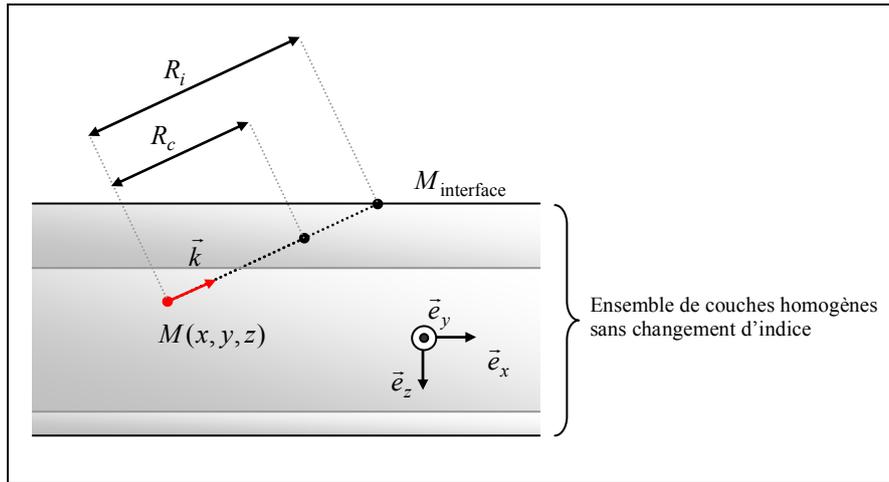


Figure 18 – Comparaison des distances R_i et R_c en projection dans le plan $(\vec{e}_x, 0, \vec{e}_z)$ en géométrie cartésienne.

- **Traitement de la collision**

Quand un photon rencontre une particule, il peut être absorbé par le milieu ou subir un changement de direction par diffusion. Le photon est considéré comme étant perdu s'il est absorbé et un nouveau photon doit être lancé. Dans le cas contraire, il se propage à nouveau dans le milieu avec un nouveau vecteur \vec{k} . La détermination de l'événement *absorption* ou *diffusion* nécessite un test sur la valeur de l'albédo du milieu ω à la position \vec{M} . Trop coûteuse en temps de calcul, cette démarche est ici remplacée par une approche de type « roulette ». A chaque collision avec une particule, le poids du photon ρ est multiplié par l'albédo du milieu ω à la position \vec{M} . Un test sur le poids ρ est alors effectué en le comparant à un poids minimum ρ_{\min} défini dans les paramètres d'entrée suivant un critère de survie de type « roulette » :

- si $\rho > \rho_{\min}$, le photon est diffusé,
- si $\rho \leq \rho_{\min}$, on compare un nombre aléatoire x à un critère de roulette x_{roulette} souvent fixé à 0,1. Si $x < x_{\text{roulette}}$, le photon est absorbé et on relance un nouveau photon. Sinon, le poids du photon est divisé par x_{roulette} et le photon est diffusé.

- **Traitement de la diffusion**

A partir du vecteur de propagation incident $\vec{k}(\theta, \varphi)$ et de la matrice de diffusion $\mathbf{P}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ du milieu à la position \vec{M} , on obtient la répartition angulaire de diffusion pour les quatre éléments du vecteur de Stokes. Il s'agit de déterminer la probabilité qu'un photon incident reparte dans un angle solide donné, autour d'une direction donnée. La diffusion est calculée dans le repère local lié à la particule : la démarche évoquée dans le code *METROPOL* et les matrices de passage $\mathbf{L}(i)$ décrites auparavant restent valables. Dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, la matrice de phase $M_{11}(\theta)$ vérifie la relation de normalisation suivante :

$$2\pi \cdot \int_0^\pi M_{11}(\theta) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \equiv 1 \quad \text{Eq. 97}$$

Le tirage aléatoire d'un nombre x compris entre 0 et 1 permet de trouver l'angle de diffusion θ_{dif} tel que :

$$2\pi \cdot \int_0^{\theta_{dif}} M_{11}(\theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta = x \quad \text{Eq. 98}$$

Un nouveau nombre x est choisi aléatoirement pour calculer l'angle azimutal de diffusion φ_{dif} par :

$$\varphi_{dif} = 2\pi \cdot x \quad \text{Eq. 99}$$

Si la source est polarisée, une technique de réjection est utilisée. Définissons p comme étant le rapport entre les premiers termes de la matrice de diffusion :

$$p = \frac{M_{12}(\theta_{dif})}{M_{11}(\theta_{dif})} \quad \text{Eq. 100}$$

On détermine les sommes s et s_{\max} où $(I, Q, U, V)^T$ est le vecteur de Stokes incident :

$$s = I + p \cdot (Q \cdot \cos 2\varphi_{dif} + U \cdot \sin 2\varphi_{dif}) \quad \text{et} \quad s_{\max} = I + \sqrt{p^2 \cdot (U^2 + Q^2)} \quad \text{Eq. 101}$$

Le rapport entre ces deux grandeurs est comparé à un nombre aléatoire x :

- si $x > s/s_{\max}$, on tire un nouveau φ_{dif} et on effectue la même démarche que précédemment,
- si $x \leq s/s_{\max}$, on continue le processus de diffusion avec le couple d'angles $(\theta_{dif}, \varphi_{dif})$.

Un repère local $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{k}_{inc})$ est construit. Les composantes des vecteurs de la base sont définies dans le repère global $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par les relations suivantes :

$$\vec{e}_i = \begin{cases} \cos \theta_{inc} \cdot \cos \varphi_{inc} \\ \cos \theta_{inc} \cdot \sin \varphi_{inc} \\ -\sin \theta_{inc} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{e}_j = \begin{cases} -\sin \varphi_{inc} \\ \cos \varphi_{inc} \\ 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 102}$$

Le vecteur propagation après diffusion est noté \vec{k}_{dif} et se déduit des équations précédentes :

$$\vec{k}_{dif} = \vec{e}_i \cdot \sin \theta_{dif} \cdot \cos \varphi_{dif} + \vec{e}_j \cdot \sin \theta_{dif} \cdot \sin \varphi_{dif} + \vec{k}_{inc} \cdot \cos \theta_{dif} \quad \text{Eq. 103}$$

Pour terminer, on calcule les angles de diffusion θ' et φ' correspondant au vecteur \vec{k}_{dif} exprimés dans le repère absolu. On utilise les matrices de passage $\mathbf{L}(i)$ définies dans le §2.3.3 pour effectuer la rotation des axes de polarisation. Le vecteur de Stokes diffusé $\vec{L}(\theta', \varphi')$ correspond à la multiplication du vecteur de Stokes incident $\vec{L}_0(\theta, \varphi)$ par la matrice de diffusion $\mathbf{P}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ normalisée par son premier terme P_{11} .

- **Détection des photons**

Les photons sont collectés en dehors du milieu (ou de la cuve plate). Les photons qui sont absorbés à l'intérieur de la cuve sont comptabilisés et considérés comme étant perdus. Les grandeurs liées à chaque photon atteignant le détecteur et accessibles par cette modélisation sont le vecteur de Stokes, le flux diffusé (ou poids) et le type de détection (photon diffus, absorbé, de type spéculaire ou collimaté). On distingue deux possibilités lors de la détection des photons : leur direction de propagation est ou n'est pas colinéaire avec la normale du détecteur.

Simulation de *BRDF-BTDF*

Dans cette configuration, le système de détection est constamment colinéaire à \vec{k} (cf. Figure 19). Il n'est pas nécessaire de projeter les vecteurs de Stokes dans le repère lié au système de détection. Un maillage angulaire pour les plans zénithaux et azimutaux est défini et les photons (poids et vecteurs de Stokes) sont comptabilisés dans ce maillage puis normalisés par le nombre de photons lancés. On remarquera que la localisation du photon sur la dernière interface n'est pas prise en compte.

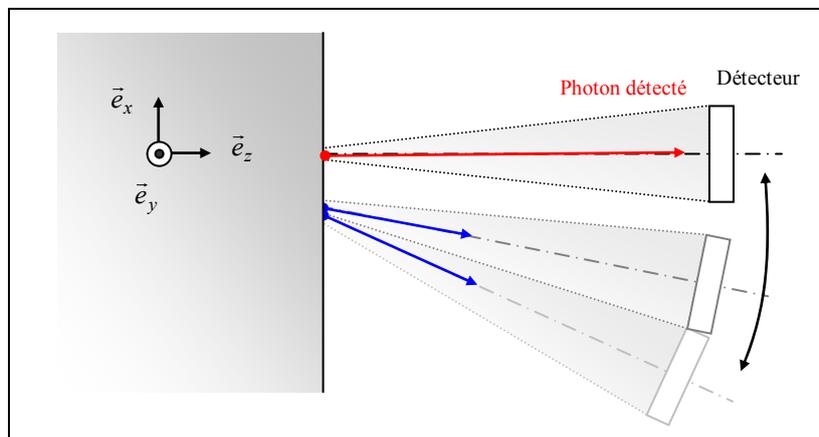


Figure 19 – Détection de type *BRDF-BTDF*.

Position quelconque du détecteur

En champ lointain, la position du capteur dans le repère global $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est quelconque. La surface de détection est repérée dans ce repère par sa normale \vec{n} . Les photons détectés ont un vecteur de propagation \vec{k} inclus dans le champ de vision du détecteur et dans l'angle solide de collection (cf. Figure 20). Dans le cas contraire, ils sont considérés comme étant perdus.

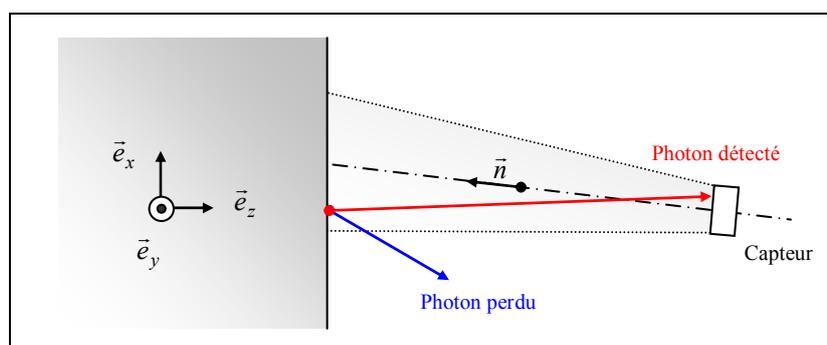


Figure 20 – Procédure de détection en champ lointain.

Les axes de polarisation (\vec{u}_p, \vec{u}_s) liés à la direction de propagation \vec{k} sont projetés sur le plan de détection. Ce changement de repère est obtenu à partir des matrices de rotation $\mathbf{L}(\sigma)$ déjà évoquées précédemment et des angles σ_1 , σ_2 et Θ donnés par :

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \cos \theta_n \cdot \cos \theta + \sin \theta_n \sin \theta \cdot \cos(\varphi_n - \varphi) \\ \cos \sigma_1 &= \frac{\cos \theta_n - \cos \theta \cdot \cos \Theta}{\sin \theta \cdot \sin \Theta} \\ \cos \sigma_2 &= \frac{\cos \theta - \cos \theta_n \cdot \cos \Theta}{\sin \theta_n \cdot \sin \Theta} \end{aligned} \quad \text{Eq. 104}$$

où les vecteurs normale et propagation sont projetés dans le repère global respectivement à partir des angles (θ_n, φ_n) et (θ, φ) . Cette formulation reste valable tant que $\varphi_n - \varphi$ est positif^[42].

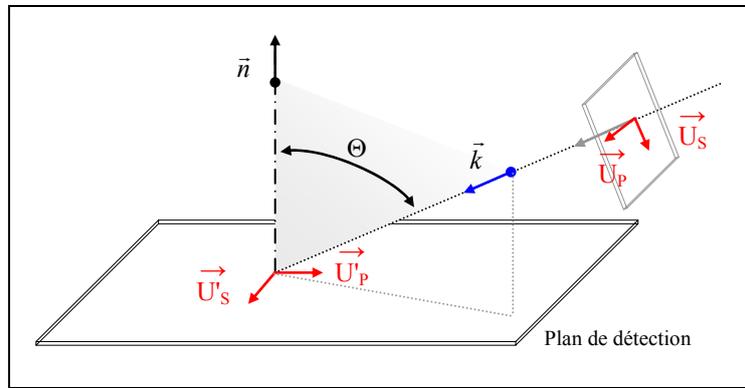


Figure 21 – Projection des axes de polarisation sur le plan de détection.

La luminance détectée $\vec{L}_{dét}$ s'exprime donc en fonction de la luminance incidente \vec{L}_{inc} et des matrices de passage $\mathbf{L}(\sigma)$:

$$\vec{L}_{dét} = \mathbf{L}(\sigma_2 - \pi) \cdot \mathbf{L}(\sigma_1) \cdot \vec{L}_{inc} \quad \text{Eq. 105}$$

On notera que ce dernier cas permet de représenter des configurations particulières telles qu'un détecteur (ou une matrice de détecteurs) parallèle à la surface de la dernière interface.

La géométrie cartésienne développée jusqu'à présent sera utilisée pour valider le code *METROPOL* dans le cas simple d'une géométrie 1D. Les codes Monte Carlo sont principalement utilisés pour générer des données de référence lorsque la géométrie est plus complexe. Nous reviendrons plus loin sur le passage du code Monte Carlo 3D en géométrie cylindrique. Cette évolution faisant partie des perspectives de travail, nous la décrivons en annexe du rapport.

4 VALIDATIONS ET INTERCOMPARAISONS DES OUTILS NUMERIQUES

Dans un premier temps, nous souhaitons valider les modèles numériques développés précédemment. Cette étape nécessite la confrontation des luminances diffusées avec des résultats bibliographiques (solutions analytiques par exemple). Nous verrons que cette étude est rapidement limitée par les faibles quantités de données publiées dans ce domaine. A partir de l'écriture du vecteur de Stokes et sa décomposition dans différentes bases qui correspondent aux états de la polarisation, nous vérifions le comportement additif des solutions de l'ETRP en fonction de l'état de la polarisation incidente. Enfin, nous réalisons une inter-comparaison entre les deux méthodes de résolution de l'ETRP que nous avons mises en place (transfert radiatif et processus stochastique).

4.1 COMPARAISONS AVEC DES RESULTATS BIBLIOGRAPHIQUES

- **Eclairage non polarisé de milieux multicouches**

Le passage d'une interface introduit une dépolarisation supplémentaire et impose la prise en considération du cône de réfraction. La quadrature numérique (*cf.* Annexe) est adaptée au passage d'une interface avec changement d'indice. Les travaux de L. Hespel^[30] mettent en évidence les *BRDF-BTDF* en lumière non polarisée pour un milieu d'indice $n_{milieu} = 1,5$ plongé dans l'air *i.e.* en présence d'une seule interface. Ces résultats sont comparés avec ceux obtenus à l'aide du code Monte Carlo et de *METROPOL* en version non polarisée (*cf.* Figure 22). Le premier élément de la matrice de diffusion (M_{11}) est représenté par une fonction de phase modèle simple de type double Henyey-Greenstein. La fonction analytique $P_{dHG}(\mu)$ est donnée par :

$$P_{dHG}(\mu) = a \cdot P_{HG_1}(\mu, g_1) + (1-a) \cdot P_{HG_2}(\mu, g_2) \quad \text{avec} \quad P_{HG_i}(\mu, g_i) = \frac{1 - g_i^2}{(1 + g_i^2 - 2 \cdot g_i \cdot \mu)^{3/2}} \quad \text{Eq. 106}$$

Dans notre cas, les variables a , g_1 et g_2 permettent de représenter une fonction de phase dont les diffusions avant et arrière sont équivalentes (*cf.* Figure 22b) :

a	g_1	g_2
0,5	0,8	-0,8

Tableau 1 – Valeurs des paramètres de la fonction modèle non polarisée.

Les autres paramètres radiatifs caractérisant le milieu sont également fixés ($\tau = 2$ et $\omega = 0,5$). Les résultats obtenus par méthode stochastique ou déterministe corroborent bien ceux présentés dans la littérature^[30] (*cf.* Figure 22a).

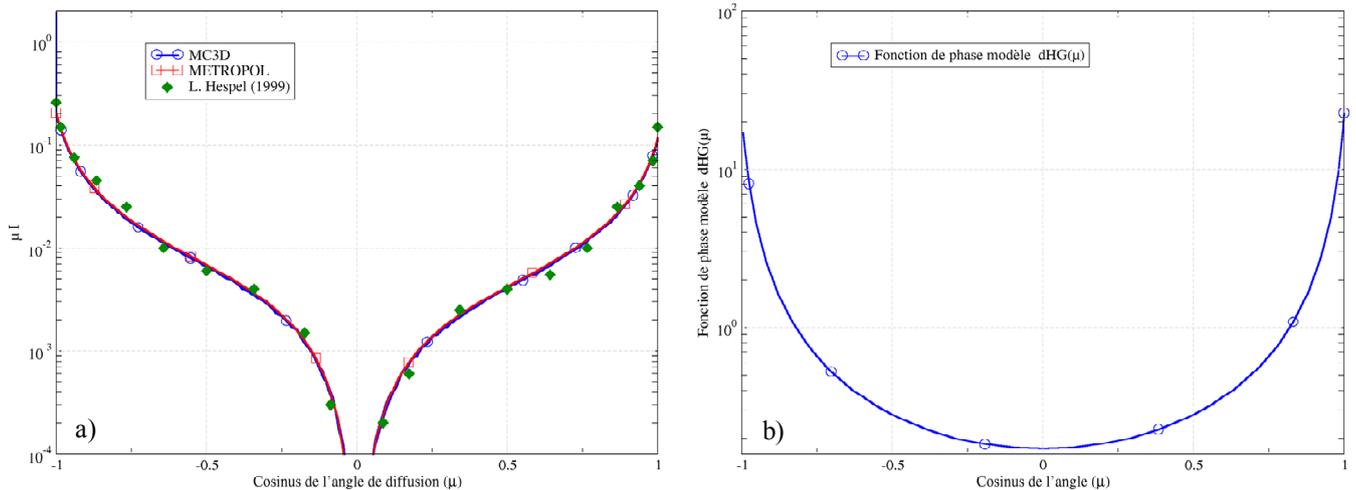


Figure 22 – (a) Comparaison des résultats pour (b) une fonction modèle (dHG) en symétrie azimutale.

- **Eclairage polarisé d'un milieu constitué par l couches homogènes sans changement d'indice**

Comme nous l'avons déjà vu, peu de données polarisées ont été publiées sur des matériaux avec changement d'indice. La plupart des travaux concernent l'éclairage non polarisé d'un milieu atmosphérique constitué par l couches homogènes (sans changement d'indice) et prennent en compte les effets de polarisation du milieu traversé. L'outil développé a été adapté pour introduire les conditions limites de ces milieux (*i.e.* présence d'un sol). La procédure d'*adding-doubling* utilisée peut être validée à partir des résultats publiés par Coulson *et al.*^[65]. Ce dernier obtient les solutions de l'ETRP par une approche analytique.

Pour différentes valeurs des paramètres d'entrée (épaisseur optique, albédo, angle d'éclairage), on recherche la diffusion de Rayleigh d'une couche atmosphérique en présence d'une surface lambertienne (*cf.* géométrie sur la Figure 23a). Le milieu ainsi défini considère des indices constants sur l'ensemble des couches traversées *i.e.* $n=1$ quelle que soit la couche. L'éclairage incident est non polarisé (lumière solaire) mais les tables^[65] tiennent compte des effets de polarisation avec le calcul complet du vecteur de Stokes diffusé au niveau du sol et au-dessus de l'atmosphère.

Les conditions limites du milieu sont modifiées si on les compare à celles décrites dans le paragraphe §2.3 de ce chapitre : la dernière couche notée l représente une surface lambertienne qui redistribue les luminances incidentes (diffuse et collimatée) dans toutes les directions sans en privilégier une en particulier. Basée sur les notations de l'Eq. 44, les luminances diffuses en limite du milieu sont non nulles uniquement dans le sens montant lorsque le mode de Fourier m est égal à 0. Comme une surface lambertienne dépolairise totalement la lumière, seul le premier terme du vecteur de Stokes est pris en compte. Il dépend du flux incident sur la dernière couche (F_τ) distribué dans tout l'espace et de l'albédo du sol (ω_{sol}) :

$$\vec{L}_{d,m=0}^-(\tau = \tau_T, \mu, \varphi) = \begin{cases} F_\tau \cdot \omega_{sol} / \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 107}$$

On considère qu'il n'y a pas de contribution des termes sources ($\vec{\sigma}_m^\pm$ de la couche l) au niveau du sol et que la matrice de transmission est égale à l'identité ($\mathbf{T} = \mathbf{1}$, $\forall \mu$). La matrice de réflexion de la dernière couche dépolarise totalement les luminances montantes et est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{R}_{m=0}^-(\mu) = \begin{bmatrix} 2 \cdot \omega_{sol} \cdot \mu \cdot \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{\forall m \neq 0}^-(\mu) = \mathbf{R}_m^+(\mu) = \mathbf{0} \quad \text{Eq. 108}$$

où ω_{sol} est l'albédo de la surface lambertienne, μ l'angle quadratique considéré et ρ son poids associé.

Le calcul par *adding-doubling* est effectué de telle sorte que les luminances d'intérêt soient prises au-dessus de l'atmosphère et au-dessus de la surface lambertienne. La Figure 23b compare la simulation numérique (*METROPOL*) et l'analyse faite par Coulson *et al.* On remarquera que le troisième terme du vecteur de Stokes (noté U) est non nul sur tout le domaine angulaire puisque $\mu_0 \neq 1$ et $\varphi_{diffusé} = 90^\circ$.

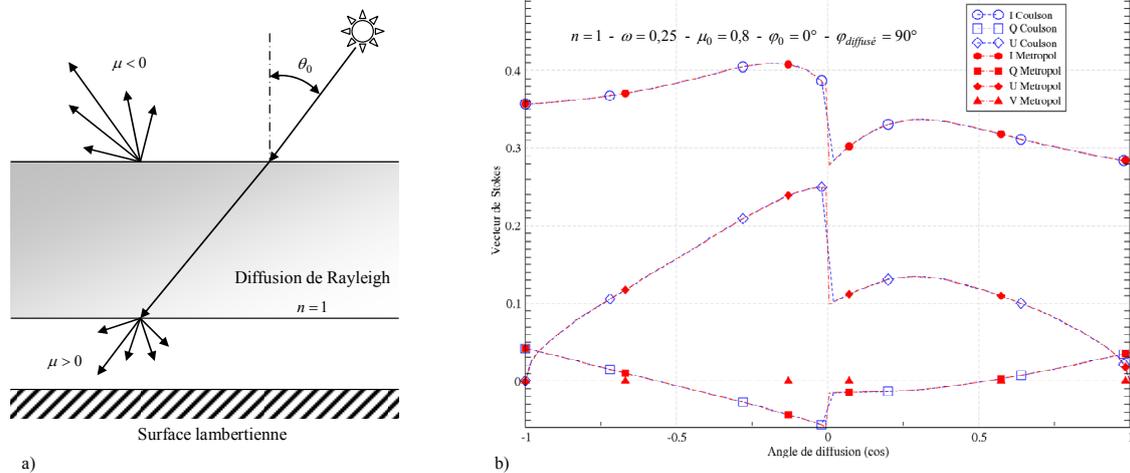


Figure 23 – Cas particulier d'un milieu atmosphérique.

(a) Géométrie étudiée par Coulson *et al.*^[65], (b) représentation des quatre composantes du vecteur de Stokes.

Cette étude nous a permis de vérifier la génération de la couche infinitésimale (méthode IGI) et la procédure de *doubling* qui étend les caractéristiques locales d'une couche à une épaisseur optique plus importante. Nous ne présentons ici que les simulations d'un cas général obtenues hors symétrie azimutale (HSA). Les résultats sont identiques quels que soient les conditions initiales et le milieu étudié. Cette comparaison valide la procédure de *doubling* utilisée pour résoudre l'ETRP, pour un milieu simple sans changement d'indices.

4.2 ADDITIVITE DES LUMINANCES DIFFUSEES

Ce paragraphe est dédié à la vérification de l'additivité des luminances diffusées en fonction de l'état de la polarisation de la luminance incidente. Pour cette étude, on considère des particules de latex mises en solution aqueuse dans une cuve de quartz (géométrie plane). La distribution en taille est donnée par une loi log-normale de paramètres $r_g = \lambda$ et $\sigma_g = 1,2$. Les indices optiques des particules et des différents milieux non absorbants sont :

Indice des particules	$1,58 + 0 \cdot j$
Indice du liant	$1,33 + 0 \cdot j$
Indice de l'interface	$1,50 + 0 \cdot j$
Indice extérieur	$1,00 + 0 \cdot j$

Tableau 2 – Particules de latex dans une cuve plate (indices).

Dans notre cas, la concentration volumique est assez faible pour que la diffusion multiple ne soit pas prépondérante : $\tau = 0,1$. On favorise ainsi les réflexions multiples entre l'interface supérieure et l'interface inférieure de l'échantillon. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la matrice de Mueller de ces particules sphériques est diagonale par blocs telle que :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & -M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 109}$$

Le formalisme de Stokes permet de décomposer les vecteurs de luminance $\vec{L}(\mu)$ dans une base où, pour chaque μ de la quadrature, $(I, Q, U, V)^T$ est la demie-somme des deux polarisations rectilignes $(1,1,0,0)^T$ et $(1,-1,0,0)^T$:

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 110}$$

Les variations angulaires des luminances diffusées ($\mu \cdot I$) pour un éclairage à la normale de l'échantillon sont tracées sur la Figure 24. Seuls les deux premiers éléments du vecteur de Stokes diffusé sont non nuls : en éclairant à la normale, la luminance diffuse est identique dans tous les plans φ considérés (symétrie azimutale) et la polarisation en U et V est nulle. A partir de l'Eq. 109 et de l'Eq. 110, on en déduit que :

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} M_{11} + M_{12} \\ M_{12} + M_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} M_{11} - M_{12} \\ M_{12} - M_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 111}$$

Contribution de l'état de la polarisation $(1,1,0,0)^T$ $(1,-1,0,0)^T$

Cette dernière relation met en avant la contribution des différents termes de la matrice de Mueller sur la variation de la *BRDF-BTDF* (cf. Figure 24) pour différents états de la polarisation. La courbe $\mu \cdot I$ équivalente à la superposition des deux états de polarisation rectiligne correspond à un éclairage non polarisé $(1,0,0,0)^T$. Le comportement angulaire de la fonction de phase (premier élément de la matrice de diffusion) est retrouvé sur ce premier graphique. La présence du cône de réfraction entre les deux interfaces explique la nouvelle répartition angulaire avec un étalement des pics de transmission et de rétrodiffusion de la fonction de phase.

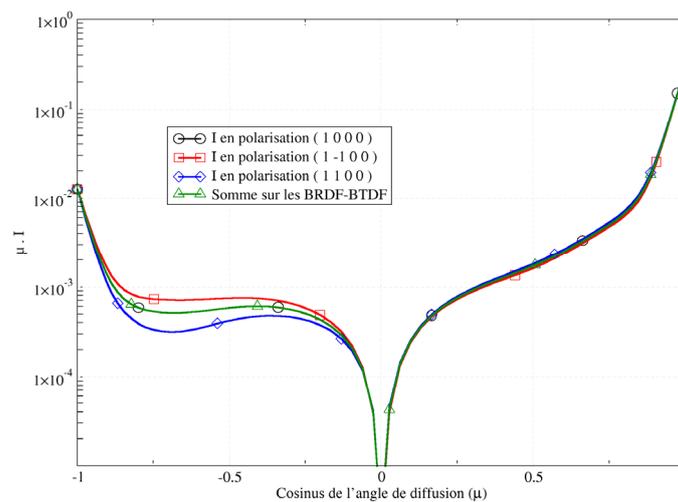


Figure 24 – Représentation de $\mu \cdot I$ pour un éclairage non polarisé et polarisé rectilignement.

Le taux de polarisation (Q/I) tient compte des modifications de la polarisation après diffusion par les particules et passage des interfaces. Il est représenté sur la Figure 25. Pour des angles proches de la rétrodiffusion ou de la transmission ($\mu \approx \pm 1$), la dépolarisation est très faible : le rapport Q/I tend vers ± 1 si l'onde incidente est polarisée. Au-delà de ce domaine, le passage des interfaces et la diffusion par les particules introduisent une dépolarisation plus importante de la luminance. Ces deux contributions seront analysées dans l'étude comportementale qui suit cette section.

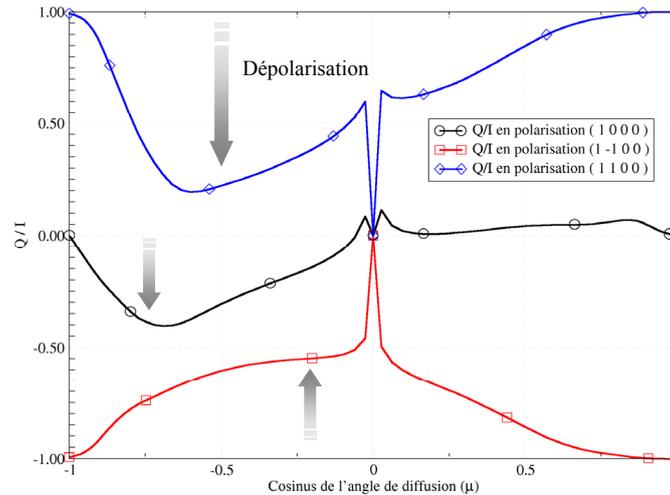


Figure 25 – Taux de dépolarisation (Q/I) en fonction de l'état de polarisation de la luminance incidente.

Les mêmes simulations ont été effectuées avec le code Monte Carlo en géométrie cartésienne et conduisent à des résultats identiques. Nous allons maintenant comparer les deux outils développés dans des configurations géométriques plus complexes (présence de multiples interfaces, par exemple).

4.3 INTER-COMPARAISON DES OUTILS NUMERIQUES EN GEOMETRIE CARTESIENNE

Les codes directs résolvant l'ETRP par une approche Monte Carlo ou de transfert radiatif polarisé sont validés par confrontation des résultats avec des références bibliographiques. Comme nous venons de le voir, beaucoup de travaux sont conduits sur la diffusion de la lumière par l'atmosphère. Les milieux plus denses avec changement d'indice et la diffusion de la lumière polarisée restent un domaine plus ouvert. Peu de travaux ont été conduits en optique polarisée, pour des milieux réels ayant une granulométrie bien définie. Il est donc intéressant de simuler de tels milieux avec les outils développés au début de ce chapitre et d'inter-comparer leurs résultats.

- **Symétrie azimutale (SA)**

Comme précédemment, nous considérons une cuve plate et des particules de latex en solution aqueuse (conditions identiques). En symétrie azimutale *i.e.* pour $\mu_0 = 1$, le vecteur de Stokes diffusé est le même dans tous les plans φ . L'étude se limite donc au plan d'incidence $\varphi_0 = 0^\circ$. Si l'éclairement est non polarisé $(1,0,0,0)^T$, un seul mode ($m = 0$) suffit pour réaliser la décomposition en série de Fourier lors de la résolution de l'ETRP par *adding-doubling* (*cf.* Figure 26ad). Pour tenir compte de Q_0 en polarisation rectiligne, il est nécessaire d'augmenter le nombre m et d'intégrer les données sur un intervalle $\Delta\varphi$. La Figure 26 représente également les *BRDF-BTDF* et le taux de polarisation obtenus avec un vecteur de Stokes incident égal à $(1,1,0,0)^T$. Les autres éléments (U/I et V/I) de la luminance diffuse sont nuls et ne sont pas présentés ici.

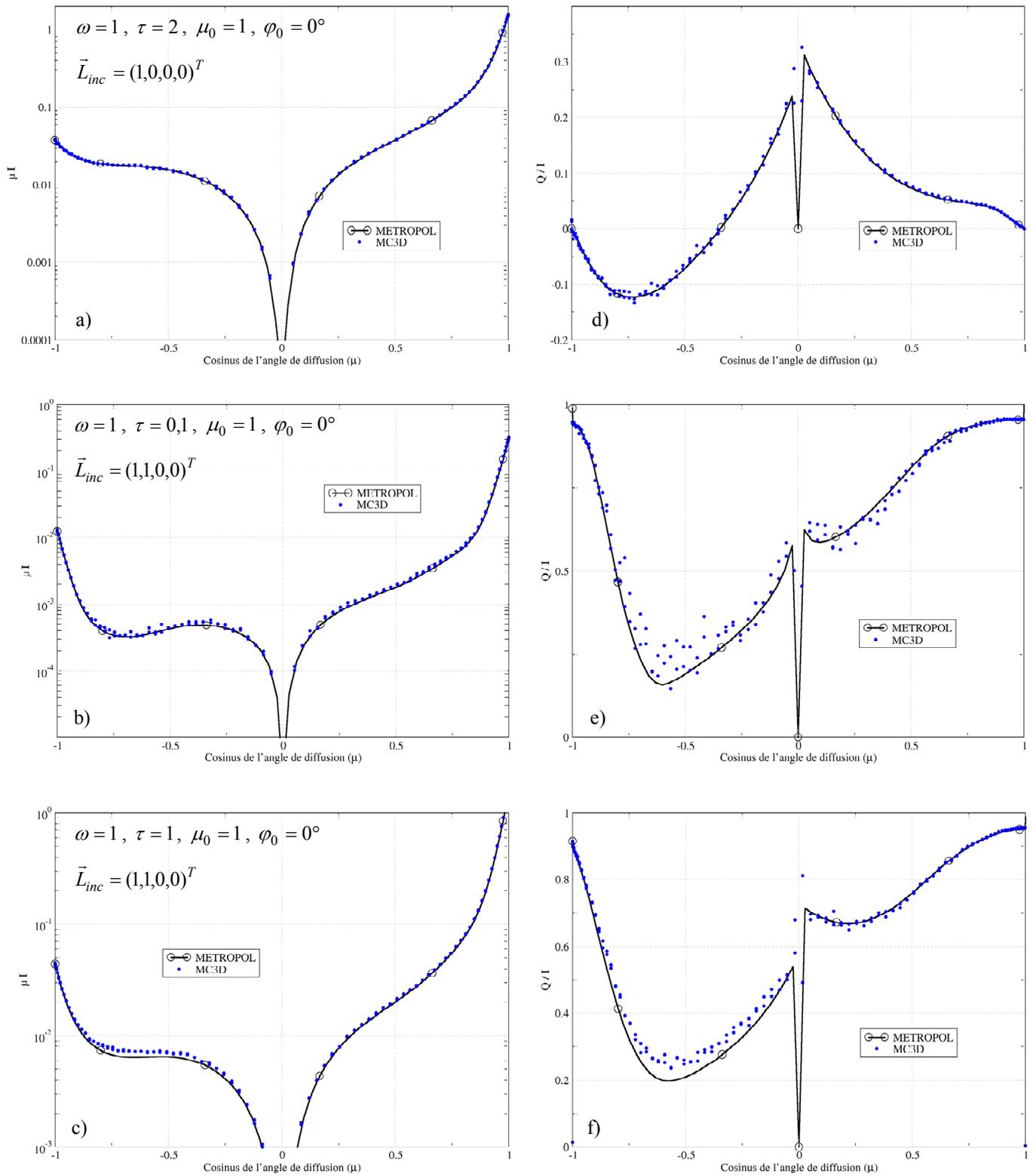


Figure 26 – Comparaison des résultats issus de METROPOL et de MC3D en symétrie azimutale.
 (a-b-c) Représentations des BRDF-BTDF et (d-e-f) du taux de dépolarisation pour $\Delta\varphi = 30^\circ$.

Les deux outils de simulation permettent d'obtenir les mêmes résultats en SA alors que les méthodes de résolutions de l'ETRP sont différentes. Cet accord est d'autant plus parfait que l'on considère des domaines angulaires correspondants aux pics de rétrodiffusion ou de transmission. Pour les autres μ , le nombre de photons lancés doit être augmenté pour diminuer l'écart type sur les données simulées par l'approche Monte Carlo. On notera que les temps de calculs sont limitant pour les codes stochastiques. L'outil *METROPOL* résolvant l'ETRP par *adding-doubling* est donc à privilégier pour étudier les milieux 1D. Il s'intégrera facilement dans une démarche d'optimisation des paramètres.

- **Hors symétrie azimutale (HSA)**

Considérons le cas où l'éclairement incident non polarisé est donné par un angle $\mu_0 \neq 1$. Hors symétrie azimutale, la valeur du champ diffusé est différente dans chacun des plans φ . Pour simplifier notre étude, nous supposons que $\mu_0 = 0,8$ et nous observons la diffusion dans le plan incident ($\varphi = 0^\circ$) et son complémentaire ($\varphi = 180^\circ$) puis dans le plan perpendiculaire ($\varphi = 90^\circ$). Du fait de la forte inclinaison de l'angle incident, la décomposition en séries de Fourier (méthode *adding-doubling*) demande un nombre de modes plus important ($m = 8$) et des temps de calcul plus conséquents. Par définition, le code Monte Carlo intègre le nombre de photons sur un angle solide donné par la taille du détecteur. Pour comparer les résultats, nous réalisons la même opération sur les données issues de *METROPOL*. La sommation sur les plans $\Delta\varphi$ est déduite de l'Eq. 77 dans la première base $(\bar{L}_{1,m}^{c,\pm}, \bar{L}_{2,m}^{s,\pm})$:

$$\bar{L}_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \begin{pmatrix} I_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m^{c,\pm}(\tau, \mu) \cdot \frac{2}{m} \cdot \sin m\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \cos m(\varphi - \varphi_0) \\ Q_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m^{c,\pm}(\tau, \mu) \cdot \frac{2}{m} \cdot \sin m\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \cos m(\varphi - \varphi_0) \\ U_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m^{s,\pm}(\tau, \mu) \cdot \frac{2}{m} \cdot \cos m\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \sin m(\varphi - \varphi_0) \\ V_d^\pm(\tau, \mu, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m^{s,\pm}(\tau, \mu) \cdot \frac{2}{m} \cdot \cos m\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \sin m(\varphi - \varphi_0) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 112}$$

On remarquera que la démarche reste inchangée si on se place dans la base $(\bar{L}_{1,m}^{s,\pm}, \bar{L}_{2,m}^{c,\pm})$ en prenant l'Eq. 78 comme référence. Les résultats sont présentés sur les deux pages suivantes et dénotent entre les deux codes un bon accord pour les deux premiers éléments du vecteur de Stokes. Toutefois, pour un éclairement incident en dehors de la normale, on remarquera que les composantes U/I et V/I ne sont pas parfaitement retrouvées. Ce comportement s'explique par deux raisons : le nombre de photons lancés (*MC3D*) doit être augmenté pour obtenir une meilleure statistique et le nombre de modes de Fourier (*METROPOL*) doit également être accru. Dans les deux cas, les temps de calcul deviennent rapidement des facteurs limitant pour réaliser une étude approfondie.

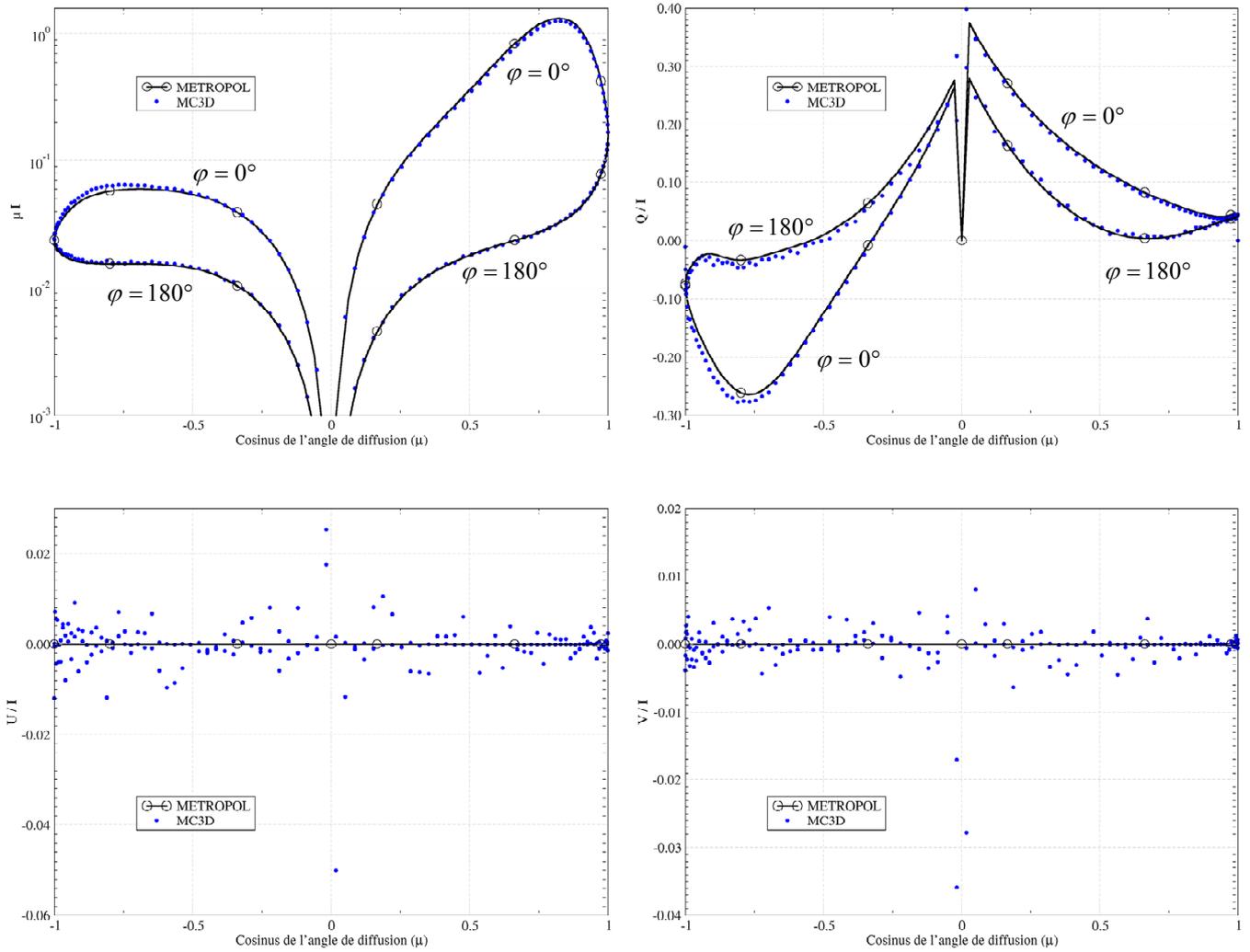


Figure 27 – Représentation angulaire du vecteur de Stokes diffusé dans les plans $\varphi = 0^\circ$ et $\varphi = 180^\circ$.

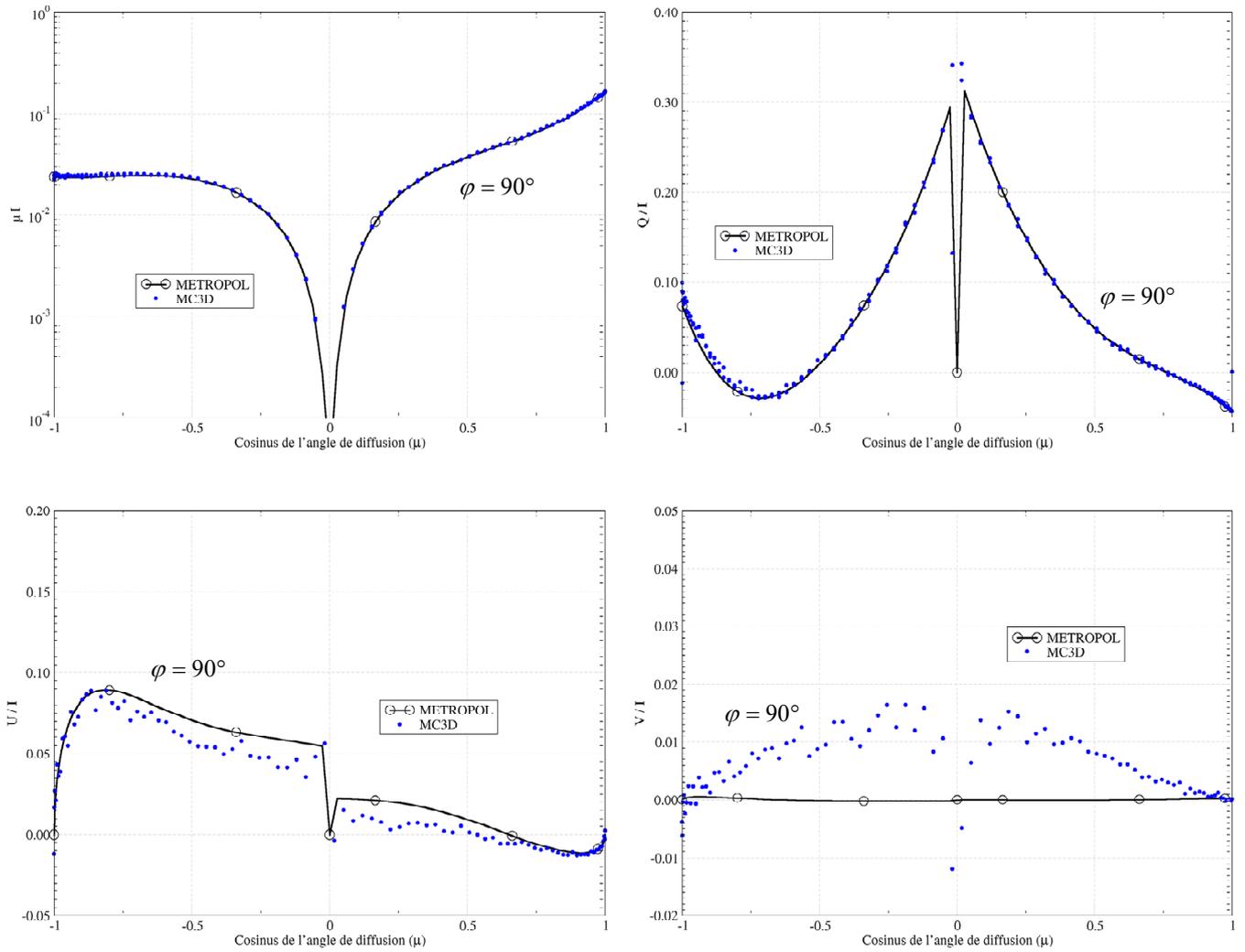


Figure 28 – Représentation angulaire du vecteur de Stokes diffusé dans les plans $\varphi = 90^\circ$.

5 ETUDE COMPORTEMENTALE DE LA DIFFUSION POLARISEE

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à une étude comportementale d'un milieu décrit par une géométrie facile à modéliser. On considère des milieux unidimensionnels de particules de latex en solution aqueuse dans des cuves plates. Sauf indication contraire, l'échantillon est éclairé à la normale. L'objectif de cette section est de présenter l'influence des différents paramètres sur la lumière diffusée. Dans un premier temps, intéressons-nous à l'apport sur le vecteur de Stokes diffusé des différents états que la polarisation incidente peut prendre.

5.1 PRISE EN COMPTE DES DIFFERENTS ETATS DE LA POLARISATION

Avant de développer la démarche d'optimisation, on considère les différents états de polarisation que nous pouvons utiliser. A partir de simulations Monte Carlo faites pour les différents états de la base du vecteur de Stokes, nous étudions le comportement global du matériau avec ou sans interface. Un éclairage en $(1,0,\pm 1,0)^T$ ou en $(1,0,0,\pm 1)^T$ permet de travailler avec des composantes U et V non nulles et d'augmenter (à priori) le nombre de paramètres disponibles pour la méthode d'optimisation.

La Figure 29 est obtenue pour un milieu de faible épaisseur optique sans interface où les particules de latex sont simplement plongées dans un milieu aqueux. L'absence d'interface se traduit par une continuité des composantes du vecteur de Stokes en $\mu = 0$. La *BRDF-BTDF* et le taux de dépolarisation sont identiques dans les quatre bases de vecteurs polarisation considérées car ils ne dépendent que du premier bloc de la matrice de Mueller (M_{11} , M_{12} et M_{22} dans l'Eq. 109). Les courbes U/I et V/I sont indépendantes du signe de la polarisation incidente ($U_0 = \pm 1$ ou $V_0 = \pm 1$ dans l'autre base) puisque le dernier bloc de la matrice de Mueller est symétrique.

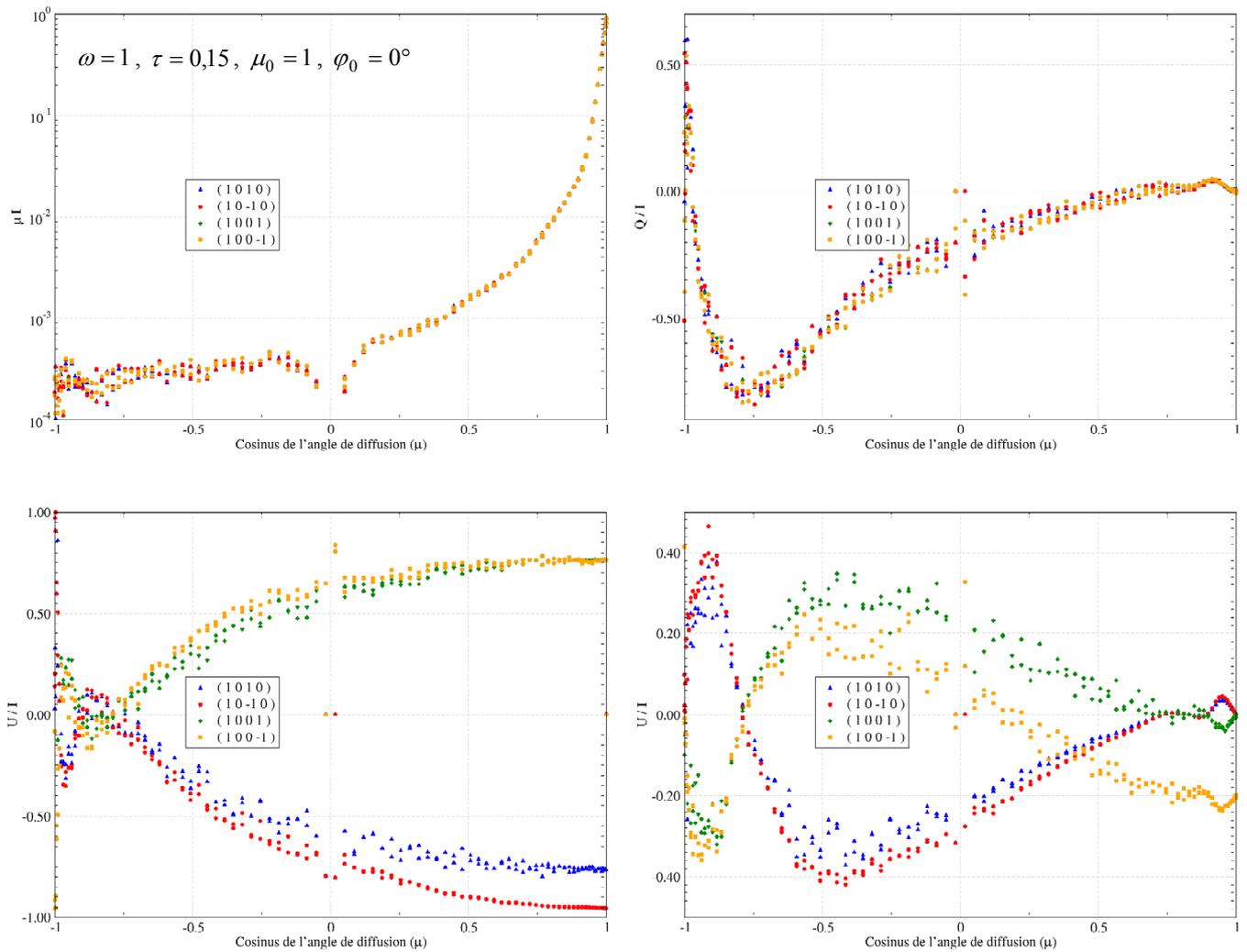


Figure 29 – Vecteur de Stokes diffusé pour différents états de polarisation (sans interface).

En plaçant des interfaces en quartz de part et d'autre de ce milieu, on modifie la distribution angulaire des deux premières composantes du vecteur de Stokes diffusé (cf. Figure 30) : les variations de $\mu \cdot I$ (en transmission) et de Q/I sont relativement proches de celles observées sur la Figure 29. Un pic de rétrodiffusion apparaît également sur la courbe de $BRDF$ (réflexion à la première interface) tandis qu'il disparaît sur la courbe du taux de dépolarisation. Lié à la matrice de Mueller, le comportement angulaire des courbes U/I et V/I sans interface disparaît. Ces deux composantes sont fortement modifiées par les interfaces de la cuve. Il sera donc difficile d'intégrer les valeurs de U et V dans une démarche d'optimisation des paramètres si elles dépendent des conditions limites de l'échantillon (changement d'indices).

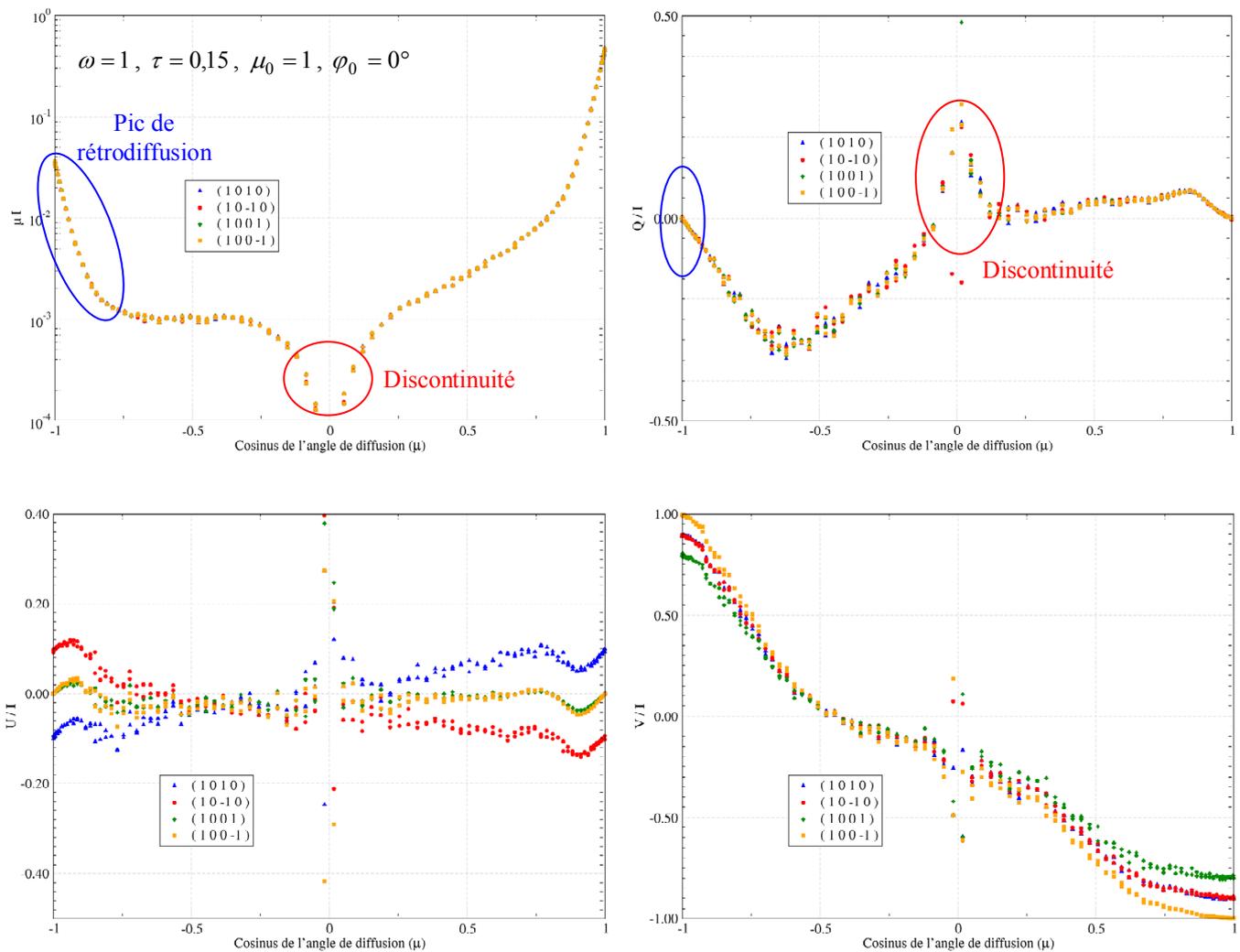


Figure 30 – Vecteur de Stokes diffusé pour différents états de polarisation (avec interfaces).

Sur la Figure 31, nous avons représenté le vecteur de Stokes diffusé dans les plans $\varphi = 90^\circ$ et $\varphi = 270^\circ$ pour un éclairage HSA ($\mu_0 = 0,5$). Les données $\mu \cdot I$ et Q/I sont théoriquement exploitables alors que les autres composantes dépendent toujours des interfaces. On notera que les nouvelles courbes U/I et V/I n'apportent pas plus d'information (par rapport à une polarisation rectiligne $(1,1,0,0)^T$) excepté pour la partie transmise de V/I en polarisation circulaire. En réalité, ces données ne seront pas accessibles par l'expérience car les bancs d'acquisition ne permettent pas de les mesurer. Nous ne disposons que des mesures dans le plan d'incidence $\varphi_0 = 0^\circ$.

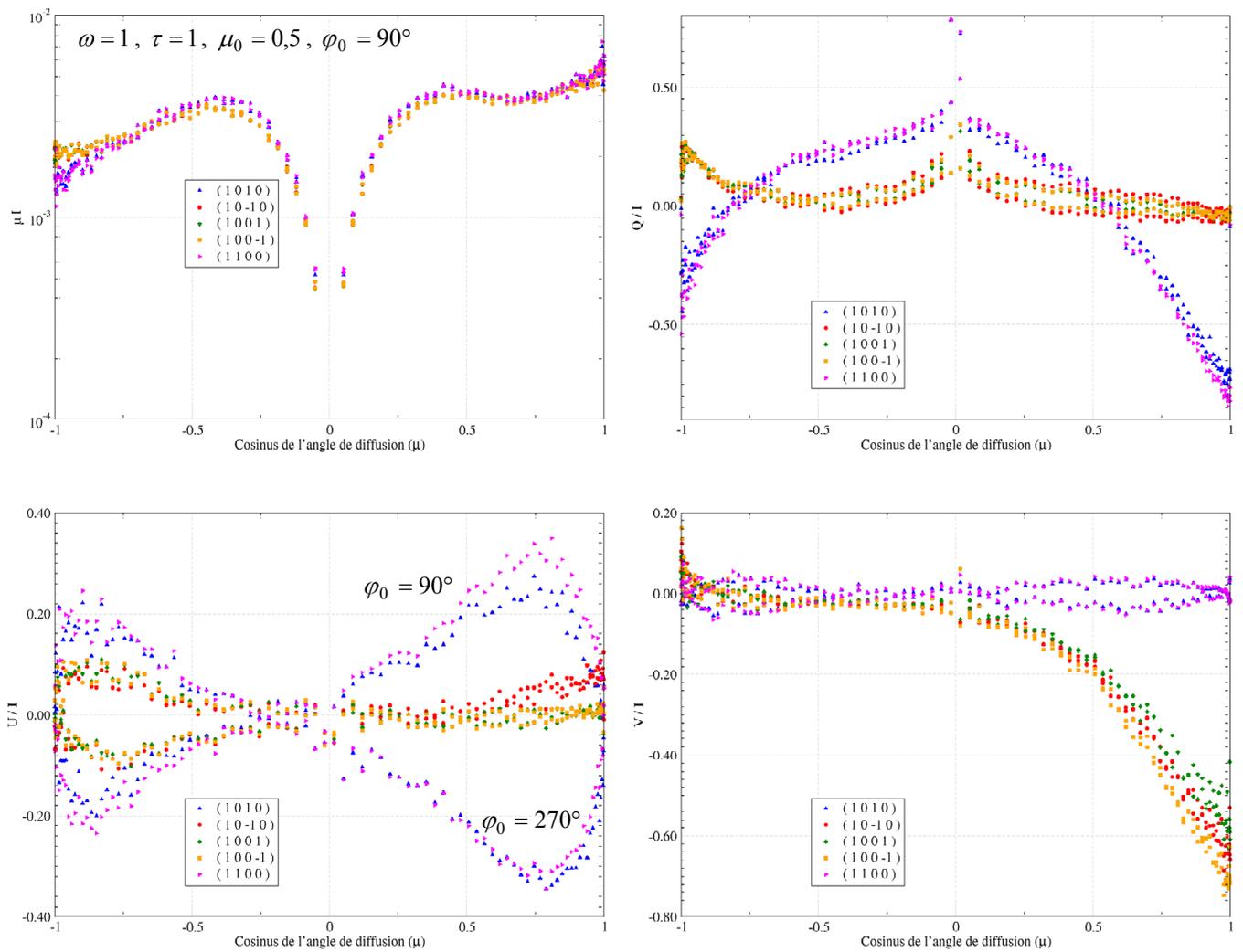


Figure 31 – Vecteur de Stokes diffusé pour différents états de polarisation (influence de l'angle d'incidence).

La décomposition de la polarisation du vecteur de Stokes incident sur l'échantillon peut se faire selon les quatre composantes I , Q , U et V . Nous venons de voir que les deux derniers états *i.e.* $(1,0,\pm 1,0)^T$ et $(1,0,0,\pm 1)^T$, ne contribuent pas à une meilleure caractérisation du milieu : ils dépendent fortement des changements d'indices entre les différentes couches du matériau. Le protocole expérimental ne permet pas l'obtention de la luminance diffuse dans tous les angles solides (par exemple, pour $\varphi \neq \varphi_0$). De plus, les méthodes expérimentales privilégient le plus souvent des montages en polarisation croisée. Pour toutes ces raisons, nous choisissons désormais de travailler exclusivement en polarisation rectiligne $(1,1,0,0)^T$ ou $(1,-1,0,0)^T$.

5.2 ETUDE COMPORTEMENTALE EN POLARISATION RECTILIGNE

Les calculs qui suivent sont réalisés à partir de l'outil *METROPOL*.

- **Influence des interfaces sur le vecteur de Stokes diffusé**

Soit un échantillon sans interface caractérisé par ses indices $n_{\text{liant}} = 1,33$ et $n_{\text{particules}} = 1,58$. La distribution en taille des diffuseurs est telle que $r_g = \lambda$ et $\sigma_g = 1,2$. A faible épaisseur optique ($\tau = 1$), on retrouve le comportement de la fonction de phase des diffuseurs sur la courbe de la *BRDF-BTDF* ainsi que le taux de dépolarisation représenté sur la Figure 32b (Q/I s'écrit en fonction de M_{12}/M_{11}). Le milieu est ensuite placé entre deux lames de verre. En présence d'interfaces, des termes sources sont introduits de part et d'autre des couches homogènes diffusantes. Comme nous l'avons montré en §2.3 de ce chapitre, ces termes sont dus aux réflexions des luminances collimatée et diffuses. La répartition angulaire du vecteur de Stokes diffusé (cf. Figure 32) est également modifiée par les matrices de Fresnel des interfaces. Le niveau de la *BRDF* augmente et le comportement angulaire de $\mu \cdot I$ ou de Q/I s'estompe en présence de ces interfaces.

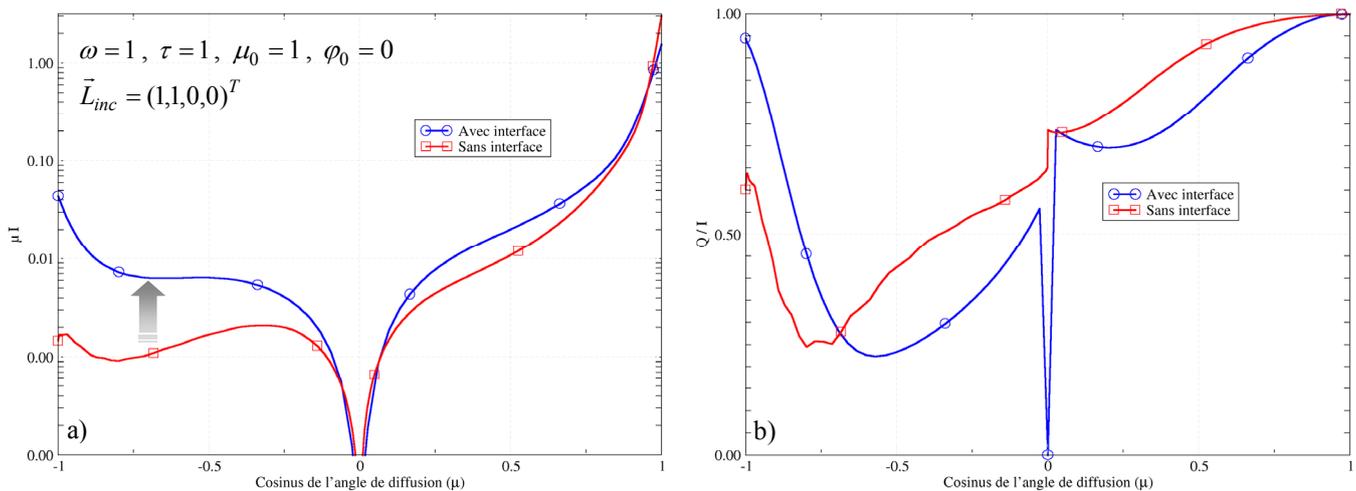


Figure 32 – Modification du vecteur de Stokes en présence d'interfaces en verre.

- **Evolution en fonction de l'épaisseur optique**

La diffusion de la lumière à très faible épaisseur optique ($\tau < 0,1$) est donnée par les relations de la diffusion simple : la *BRDF-BTDF* est identique à la fonction de phase (non polarisée) d'un milieu diffusant après redistribution angulaire due au passage des interfaces (cf. §5.1 et Figure 29). La représentation de $\mu \cdot I$ sur la Figure 33a est à rapprocher du premier terme de la matrice de Mueller du milieu noté M_{11} après passage des interfaces. Lorsque τ augmente, la dépolarisation de la lumière incidente augmente. Les variations angulaires de Q/I montrent que la dépolarisation est plus importante pour les $\mu \neq \pm 1$. En diffusion multiple, on constate un

décalage en terme de niveaux des courbes Q/I . Si l'épaisseur optique est trop importante ($\tau > 8$), l'onde incidente est complètement dépolarisée par le milieu et on converge rapidement vers la même solution pour la $BRDF-BTDF$ et le Q/I réfléchi. Seule la partie transmise du taux de dépolérisation reste encore sensible aux fortes épaisseurs optiques. Ce phénomène est essentiellement dû à la diffusion volumique puisque les mêmes constatations sont faites sur un milieu sans interface.

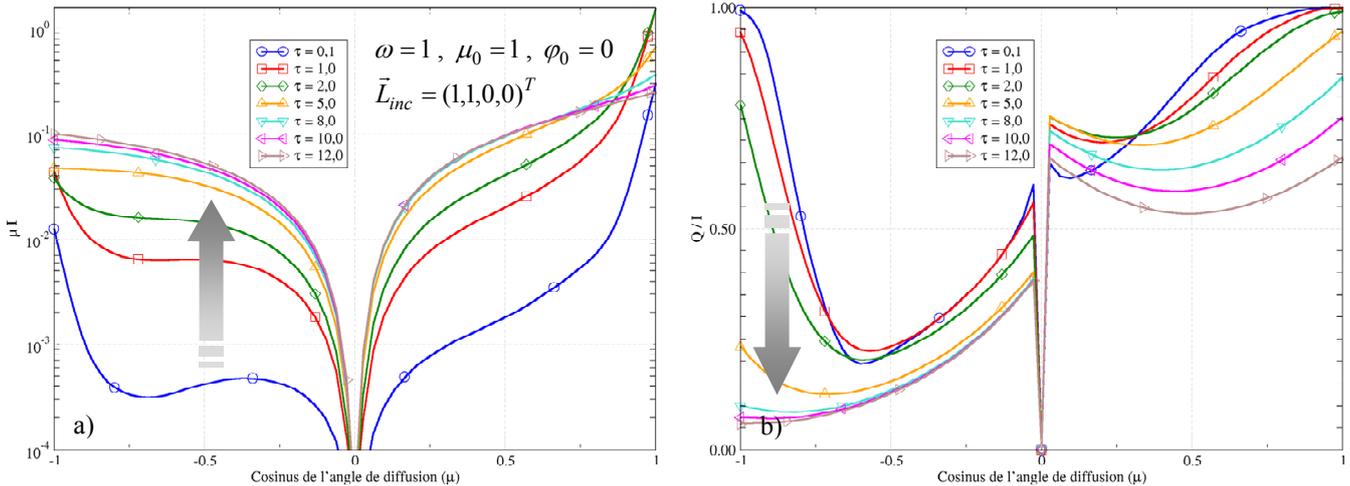


Figure 33 – Modification du vecteur de Stokes en fonction de l'épaisseur optique.

Lorsque τ augmente, le comportement angulaire diminue. Seuls les niveaux des différentes courbes sont modifiés.

• Variation de l'albédo monochromatique

Par définition, l'albédo est le rapport entre le coefficient de diffusion $k_{dif}(\lambda)$ et le coefficient d'extinction $k_{ext}(\lambda)$ du milieu et des diffuseurs. Ces coefficients dépendent fortement des indices des particules et du liant. En réalité, la modification de l'indice des particules ou du liant entraîne non seulement la modification de l'albédo mais aussi celle de la matrice de Mueller. Dans un premier temps, pour se placer dans un cas univariant, seules les variations de l'albédo seront considérées, la matrice de Mueller demeurant inchangée. Lorsque l'absorption augmente, *i.e.* l'albédo diminue (*cf.* Figure 34a), on a bien une baisse du niveau de la $BRDF-BTDF$. Si l'absorption devient prépondérante, le rapport Q/I croît (*cf.* Figure 34b). L'aspect angulaire de Q/I (en réflexion) est conservé quelle que soit la valeur de ω . On observe uniquement un changement de niveau. En effet, plus l'albédo diminue, moins la diffusion intervient dans le processus de dépolérisation. On tend alors vers la polarisation incidente.

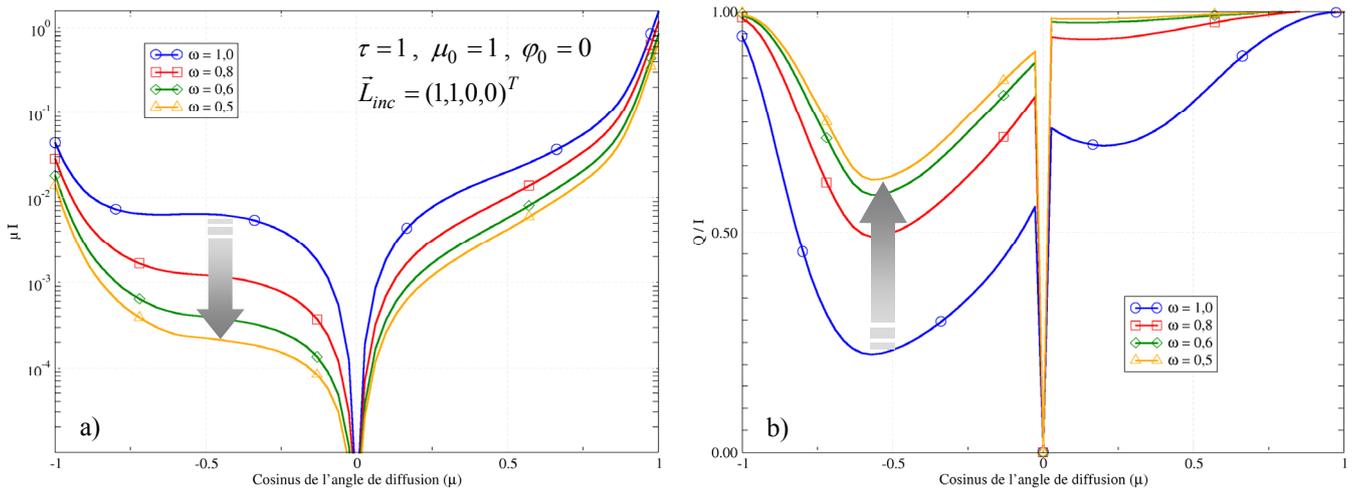


Figure 34 – Étude comportementale en fonction de l'albédo (indice des particules constant).

En réalité, si le liant est non absorbant et parfaitement connu, une variation de l'albédo doit correspondre à une variation de l'indice des diffuseurs dans le milieu. L'albédo diminue en présence d'un indice imaginaire non nul des particules. Le tableau suivant présente les différents indices que nous pouvons choisir pour obtenir des albédos inférieurs à 1 équivalents au cas précédent.

Indice des particules	Albédo
$n = 1,58 + j \cdot 0,000$	$\omega = 1,0$
$n = 1,58 + j \cdot 0,033$	$\omega = 0,8$
$n = 1,58 + j \cdot 0,0975$	$\omega = 0,6$
$n = 1,58 + j \cdot 0,185$	$\omega = 0,5$

Tableau 3 – Détermination des albédos en fonction de la partie imaginaire des indices des particules.

Cette fois-ci, la matrice de Mueller est modifiée. Le comportement global des courbes de $BRDF-BTDF$ et de Q/I reste inchangé lorsque la partie imaginaire de l'indice des particules est faiblement modifiée (cf. Figure 35). Lorsque celle-ci s'élève beaucoup, on peut constater une légère évolution du rapport Q/I en réflexion. Les résultats sont néanmoins encourageants dans l'optique de faire porter au seul albédo la prise en compte de l'absorption par les particules. On notera qu'il est vraisemblable que l'indice réel des particules devra être bien maîtrisé car il influe fortement sur la matrice de Mueller.

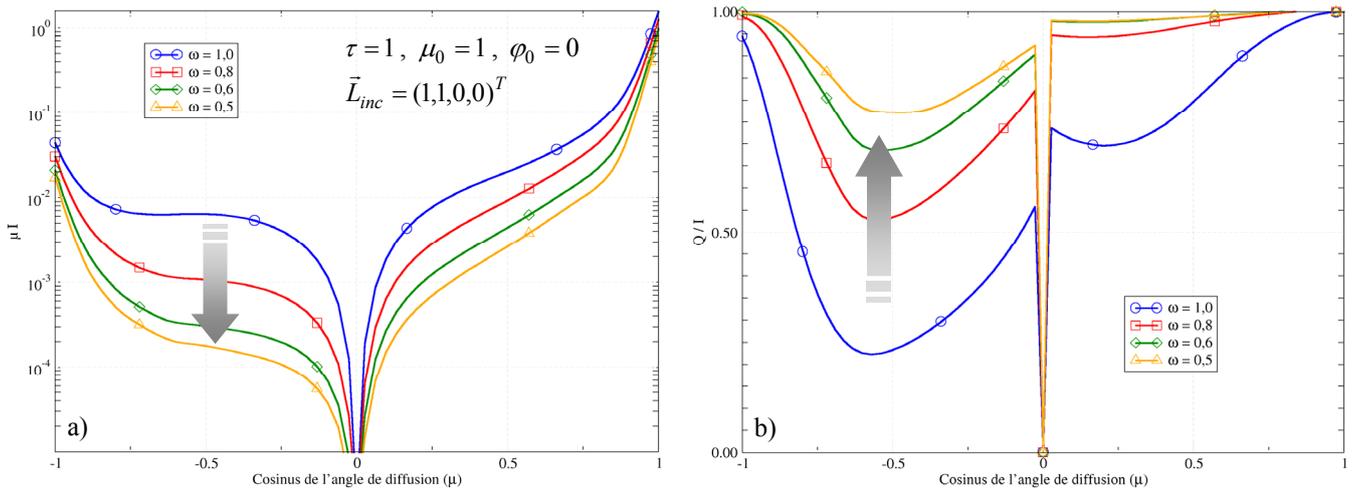


Figure 35 – Etude comportementale avec variation de la partie imaginaire de l'indice des particules.

- **Evolution en fonction de la granulométrie**

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, la taille des particules est donnée par une distribution log-normale monodisperse. Lorsque le rayon (r_g) des diffuseurs devient grand devant la longueur d'onde, la décomposition en polynômes de Legendre nécessite un plus grand nombre de paramètres pour modéliser la matrice de diffusion. Ce besoin s'explique par la présence de pics avant fortement prononcés pour ce type de particules. Sur la courbe des $\mu \cdot I$, les pics de rétrodiffusion et de transmission sont plus importants lorsque la taille des particules augmente. On en déduit que le comportement angulaire de la $BRDF-BTDF$ (respectivement Q/I) est semblable en terme de niveau des courbes quelle que soit la valeur de r_g , excepté pour les angles voisins de la normale *i.e.* $\mu \approx \pm 1$. Enfin, on remarquera que considérer des particules de grande taille par rapport à la longueur d'onde s'avère vite coûteux en temps de calcul. Il sera nécessaire d'adapter les données en se basant sur des méthodes d'approximation et de troncature des fonctions de phase. Ces méthodes seront détaillées lors de l'analyse de sensibilité faite sur les différents paramètres radiatifs (*cf.* Chapitre III).

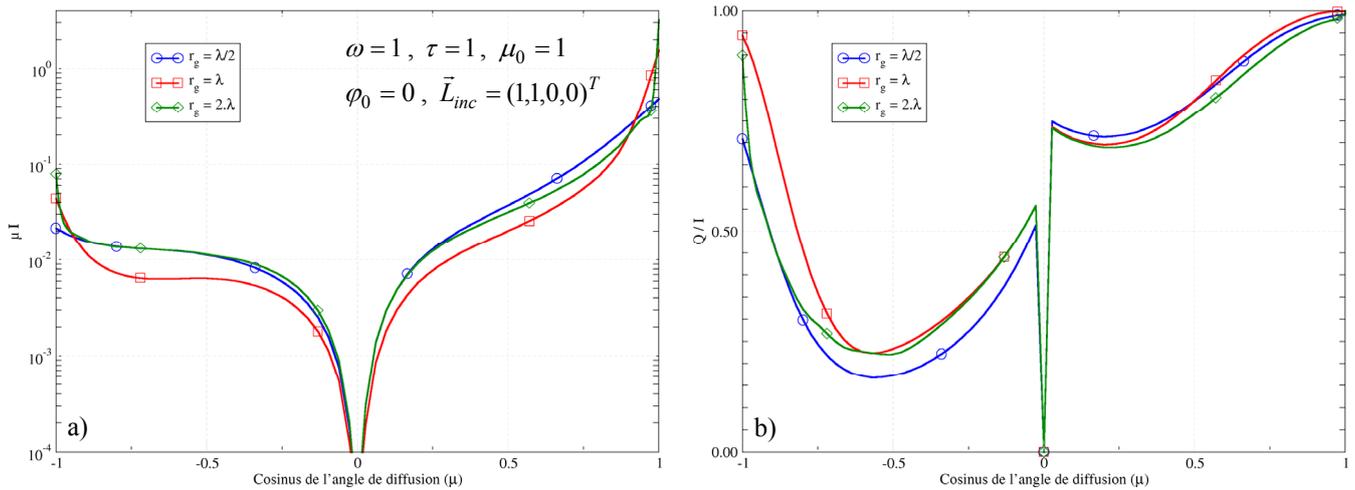


Figure 36 – Influence de la granulométrie sur la luminance diffusée.

6 SYNTHÈSE

L'objectif de ce chapitre était le développement d'outils numériques permettant de résoudre l'ETRP. Le premier outil (*METROPOL*) est basé sur une méthode faisant intervenir une décomposition des luminances dans l'espace de Fourier. La procédure d'*adding-doubling* modélise parfaitement la diffusion de la lumière polarisée par des milieux unidimensionnels et optiquement denses. Le second résout le transfert radiatif polarisé par une approche de type Monte Carlo. Dans notre démarche d'étude, les résultats obtenus à l'aide des deux outils sont dans un premier temps inter-comparés. Cette confrontation s'avère très satisfaisante. Ainsi validés, nous pouvons les utiliser à des fins particulières. Le code Monte Carlo sert à déterminer les fonctions d'appareil de modèles instrumentaux et à simuler tous les états de polarisation d'une onde incidente sur un milieu de géométrie quelconque. Numériquement plus rapide, le code *METROPOL* est adapté à des études systématiques de milieux diffusants en géométrie 1D. Notre unique contrainte (imposée) concerne la polarisation incidente qui doit être rectiligne ou non-polarisée. En effet, la prise en compte d'une polarisation quelconque augmente les temps de calcul de l'*adding-doubling* car elle nécessite deux calculs dans des bases différentes avant de sommer les résultats. Nous allons voir dans le chapitre suivant qu'il est possible d'intégrer dans une procédure d'optimisation des paramètres radiatifs. Une étude de sensibilité sur ces paramètres permettra d'indiquer si la prise en compte de l'évolution angulaire du vecteur de Stokes diffusé contribue à une meilleure détermination des paramètres radiatifs dans la méthode d'optimisation.

CHAPITRE III :

OPTIMISATION DE DONNEES EXPERIMENTALES POLARISEES

PAR METHODE D'IDENTIFICATION DES PARAMETRES

1 VERS L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES

L'intérêt du développement d'une méthode d'identification des paramètres repose sur une constatation simple : il est souvent difficile de modéliser les propriétés radiatives ou la diffusion d'un milieu réel. En effet, cette modélisation requiert d'une part, une parfaite maîtrise des phénomènes influant sur les propriétés radiatives (par exemple, la parfaite connaissance des effets de la diffusion dépendante intervenant aux forts taux de charge) et d'autre part, une parfaite connaissance des propriétés microphysiques des milieux étudiés (granulométrie, morphologie des diffuseurs...). Dans beaucoup d'applications, ces informations sont fragmentaires et il s'avère dès lors délicat de confronter la théorie et l'expérience. L'idée majeure de l'identification est de mieux appréhender les paramètres radiatifs ou les constituants d'un milieu réel en confrontant une mesure de ce milieu à une modélisation « paramétrisée » par les données recherchées. Même si cette approche demeure en général limitée à une comparaison ponctuelle, elle apporte néanmoins une information fondamentale permettant de mieux appréhender les phénomènes mis en jeu. Pour toutes ces raisons, une approche par identification des paramètres est donc proposée et est décrite dans ce chapitre.

L'identification de paramètres est un domaine largement investigué. Historiquement, seule l'ETR non polarisée fut considérée et appliquée aux propriétés atmosphériques^[70]. En appliquant la méthode des **moments angulaires** développée par Chandrasekhar^[34] et en utilisant les fonctions intégrantes de luminance^[70], une erreur est commise sur la détermination des paramètres^{[71][72]}. Des codes Monte Carlo ont également été employés^{[73][74]} mais leurs temps de calcul s'avèrent être rapidement un facteur limitant^[77]. Des travaux sont à rapprocher de notre démarche puisqu'ils considèrent des milieux plans hétérogènes^[30]. Ces différentes approches non polarisées sont toutes adaptées au cas considéré et sont basées sur la minimisation de fonctions « objectifs » faisant intervenir les luminances mesurées et calculées. Ces méthodes sont souvent confrontées à des limitations et à l'application d'hypothèses fortes, comme par exemple la connaissance de l'épaisseur optique. Ainsi, la détermination de paramètres indépendants devient difficile lorsque l'un d'entre eux contribue d'avantage à la modification angulaire ou au niveau de la diffusion. C'est le cas de l'albédo et de l'épaisseur optique pour des milieux optiquement denses. Les outils existants (en non polarisé) ne sont plus adaptés pour l'étude de matériaux tels que des peintures lorsque l'épaisseur optique est inconnue.

La démarche que nous proposons se veut être une amélioration des méthodes existantes dans ce domaine. Nous proposons d'intégrer les données polarisées dans le processus d'identification des paramètres. En effet, nous partons des deux postulats suivants :

- l'apport de données complémentaires ne peut être que favorable au conditionnement du problème,
- la diffusion multiple est le facteur prépondérant de la dépolarisation, nous laissant penser que le taux de dépolarisation est essentiellement lié à l'épaisseur optique.

Notre démarche emploie, comme bon nombre de méthodes d'identification, le concept de minimisation de fonctions « objectifs ». La Figure 37 présente le schéma d'identification que nous avons retenu dans notre étude.

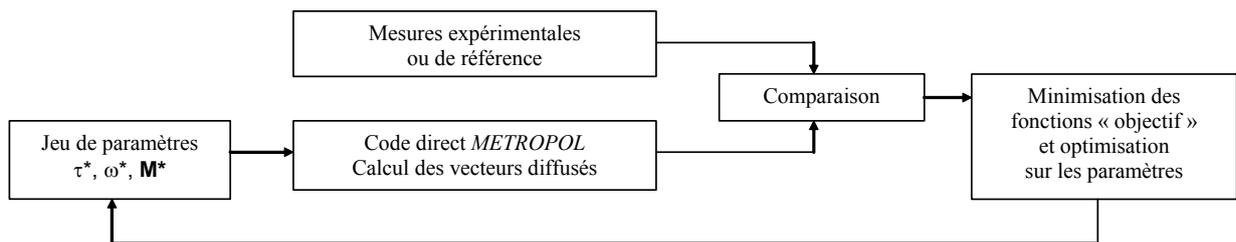


Figure 37 – Schéma de principe de l'identification.

Notre approche est fondée sur le calcul des solutions de l'ETRP en géométrie 1D en utilisant la méthode développée dans le chapitre précédent et est couplée à une méthode de moindres carrés qui minimise les écarts entre les données de référence (expérimentales par exemple) et des valeurs de luminances polarisées calculées. Les milieux sont principalement caractérisés par un jeu de paramètres regroupés au sein d'un même vecteur $\vec{x} = \{\tau, \omega, \vec{\beta}\}$ et faisant intervenir l'épaisseur optique τ , l'albédo ω et la matrice de diffusion à travers le vecteur $\vec{\beta}$.

L'identification des paramètres est basée sur des approches itératives et des variations successives des paramètres d'intérêt x_j . Pour diminuer les temps de calcul et converger vers des solutions proches de la réalité, la dimension de \vec{x} doit être adaptée au minimum de paramètres nécessaire à une bonne modélisation des propriétés physiques du matériau. Ainsi, on portera une attention particulière à la représentation de la matrice de Mueller (dimension 4x4) sous forme de paramètres pour limiter la dimension du vecteur $\vec{\beta}$.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons dans un premier temps à la réduction du nombre de paramètres que l'on doit déterminer par optimisation pour représenter la matrice de Mueller. Une étude de sensibilité sur les paramètres radiatifs d'intérêt est ensuite conduite afin d'en déterminer l'importance dans le processus d'identification. Là où les travaux présents dans la littérature considèrent des fonctions « objectifs » définies sur tout le domaine angulaire, cette étude de sensibilité permet de restreindre l'intervalle angulaire sur les données polarisées d'intérêt et d'améliorer ainsi le conditionnement du problème. Dans une dernière partie, après avoir présentées les différentes méthodes d'optimisation (*i.e.* de minimisation des fonctions « objectifs ») que nous avons retenues, une étude numérique est effectuée pour tester la convergence de la méthode d'identification, en déterminer le domaine d'application, ses points forts et ses points faibles.

2 REPRESENTATION DE LA MATRICE DE DIFFUSION

2.1 PROBLEMATIQUE

Lorsque les paramètres sont indépendants les uns des autres et qu'il est possible de définir une seule fonction « objectif » pour chacun d'entre eux, les méthodes d'optimisation actuelles sont adaptées pour retrouver la valeur de plus de 100 termes. Les travaux conduits par Sanchez *et al.*^[76] et Silva *et al.*^[71] démontrent que s'il y a une dépendance entre les fonctions « objectifs », les méthodes d'optimisation « classiques » ne sont plus utilisables au-delà de 5 paramètres : la sensibilité des méthodes d'optimisation au bruit devient trop importante.

La diffusion polarisée d'un milieu hétérogène est gouvernée simultanément par toutes ses propriétés radiatives. Ainsi, le principal obstacle aux méthodes d'optimisation réside dans l'interdépendance des paramètres et dans le grand nombre d'éléments à considérer. La construction de fonctions « coût » indépendantes pour chacun de ces paramètres radiatifs est d'autant plus délicate que le nombre de paramètres est important. Autrement dit, même si l'idée de définir des fonctions « coût » les plus indépendantes possibles doit guider notre approche, la restriction du nombre de variables à optimiser demeure indispensable. En particulier, l'effort doit porter sur la représentation de la matrice de Mueller. Nous allons dans ce paragraphe étudier les solutions envisageables.

Classiquement, la matrice de Mueller est représentée par sa décomposition dans la base des polynômes de Legendre. Si une démarche d'identification utilise ces coefficients de Legendre comme paramètres, les difficultés d'optimisation augmentent de façon significative. En effet, le nombre requis du polynôme peut être important pour bien représenter un seul des termes de la matrice. Dans un premier temps, il est donc intéressant de développer des méthodes numériques autorisant la diminution du nombre de polynômes, tout en conservant intacte l'information physique qu'ils contiennent. La troncature des fonctions de phase est couramment employée pour parvenir à cette fin. Nous regardons son utilisation potentielle pour la matrice de Mueller, sans oublier que le nombre total de paramètres est à multiplier par le nombre de termes de la matrice non nuls.

D'autres approches classiquement employées en identification non polarisée utilisent des fonctions modèles afin de réduire le nombre de paramètres représentant la matrice de Mueller (*i.e.* la fonction de phase dans le cas non polarisé). Nous regardons alors la généralisation de cette approche au cas polarisé.

Ces deux approches (troncatures et fonctions modèles) n'offrant pas une solution totalement applicable à notre démarche, une approche consistant à représenter la matrice de Mueller sous la forme de paramètres granulométriques dans l'approximation de sphères équivalentes est finalement choisie.

2.2 UTILISATION DES TRONCATURES NUMERIQUES

Les éléments de la matrice de phase $M_{ij}(\mu)$ sont développés dans la base des polynômes de Legendre de telle sorte qu'ils soient parfaitement représentés par les coefficients d'expansion^[80] $\chi_{ij,k}$:

$$M_{ij}(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{ij,k} \cdot p_k(\mu) \quad \text{Eq. 113}$$

où $p_k(\mu)$ est le polynôme de Legendre de degré k et de coefficient $\chi_{ij,k} = \frac{2k+1}{2} \cdot \int_{-1}^1 p_k(\mu) \cdot M_{ij}(\mu) \cdot d\mu$.

En théorie, cette somme est infinie mais le développement se limite en pratique à l'ordre L selon un critère empirique décrit par Wiscombe *et al.*^[78] garantissant la conservation de l'énergie en fonction du nombre de directions utilisées pour la résolution de l'ETRP. Ce nombre de termes peut être néanmoins très élevé si la fonction présente un caractère très anisotrope ou des oscillations marquées. Comme il est un facteur limitant dans les méthodes numériques de résolution de l'ETRP soit en temps de calcul, soit en occupation de l'espace mémoire, il est généralement limité par l'utilisation d'une troncature. Cette troncature modifie la répartition de l'énergie diffusée et impose l'ajustement des autres paramètres radiatifs de la couche traversée. On définit^[79] le coefficient de troncature f_{11} pour le premier élément de la matrice de diffusion à partir de la fonction tronquée (M_{11}^{tr}) et non tronquée (M_{11}). Cette définition est identique à celle utilisée en optique non polarisée :

$$f_{11} = \int_{\Omega} (M_{11}(\mu) - M_{11}^{tr}(\mu)) \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - f_{11} = \int_{\Omega} M_{11}^{tr}(\mu) \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \quad \text{Eq. 114}$$

La fonction de phase tronquée est ensuite normalisée telle que :

$$M_{11}^*(\mu) = \frac{1}{1 - f_{11}} \cdot M_{11}^{tr}(\mu) \quad \text{Eq. 115}$$

Cette méthode de troncature doit être étendue à l'ensemble des éléments ij de la matrice de diffusion^[79]. Le principe général est la conservation du degré de polarisation avant et après troncature :

$$\frac{M_{12}(\mu)}{M_{11}(\mu)} = \frac{M_{12}^{tr}(\mu)}{M_{11}^{tr}(\mu)} \quad \text{Eq. 116}$$

En généralisant cette approche à tous les termes de la matrice, on obtient un coefficient de troncature f_{ij} pour chacun d'entre eux. Ainsi, l'Eq. 116 reste vraie quel que soit l'élément considéré :

$$\frac{M_{ij}(\mu)}{M_{11}(\mu)} = \frac{M_{ij}^{tr}(\mu)}{M_{11}^{tr}(\mu)} \quad \text{Eq. 117}$$

Les coefficients de Legendre, l'albédo et l'épaisseur optique sont modifiés^[81] tels que :

$$\begin{aligned}\chi_{ij,k}^{tr} &= \frac{\chi_{ij,k} - f_{ij}}{1 - f_{ij}} \\ \omega^{tr} &= \frac{1 - f_{11}}{1 - \omega \cdot f_{11}} \cdot \omega \\ \tau^{tr} &= (1 - \omega \cdot f_{11}) \cdot \tau\end{aligned}\quad \text{Eq. 118}$$

L'idée est d'associer à la troncature une méthode dite de **delta-approximation** dans laquelle le pic de diffusion est remplacé par un Dirac pondéré par un coefficient qui dépend de f_{ij} :

$$M_{ij}(\mu) = 2f_{ij} \cdot \delta(1 - \mu) + (1 - f_{ij}) \cdot M_{ij}^{tr,*}(\mu) \quad \text{Eq. 119}$$

A partir de cette approche, différentes méthodes de delta-approximation ont été développées. La **méthode δe** se base sur l'approximation d'Eddington^[81] qui représente la fonction de phase tronquée par les deux premiers termes de son développement sur les polynômes de Legendre :

$$M_{ij}^{\delta e}(\mu) = 2f_{ij} \cdot \delta(1 - \mu) + (1 - f_{ij}) \cdot (1 + 3 \cdot g_{ij}^{tr} \cdot \mu) \quad \text{Eq. 120}$$

où g_{ij}^{tr} est le coefficient d'asymétrie de la fonction de phase tronquée :

$$g_{ij}^{tr} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-1}^1 M_{ij}^{tr}(\mu) \cdot \mu \cdot d\mu \quad \text{Eq. 121}$$

Pour obtenir le même coefficient d'asymétrie entre la fonction tronquée et la fonction d'origine, g_{ij}^{tr} doit également vérifier l'équation suivante :

$$g_{ij}^{tr} = \frac{g_{ij} - f_{ij}}{1 - f_{ij}} \quad \text{Eq. 122}$$

La **méthode δM** ^[80] s'inscrit dans la continuité de l'approximation d'Eddington. La principale différence réside dans le nombre de termes conservés ($2M$ premiers moments) :

$$M_{ij}^{\delta M}(\mu) = 2f_{ij} \cdot \delta(1 - \mu) + (1 - f_{ij}) \cdot \sum_{k=0}^{2M-1} \chi_k^{tr} \cdot p_k(\mu) \quad \text{Eq. 123}$$

où la variable M est l'ordre de l'approximation ($M = 1$ correspondant à δe). Les différents coefficients sont reliés entre eux par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\chi_{ij,k}^{tr} &= \frac{\chi_{ij,k} - f_{ij}}{1 - f_{ij}} && \text{pour } k \leq 2M - 1 \\ \chi_{ij,k} &= f_{ij} && \text{pour } k \geq 2M\end{aligned}\quad \text{Eq. 124}$$

Le coefficient de troncature est fixé tel que $f_{ij} = \chi_{ij,2M}$, ce qui permet de le définir de manière naturelle à la différence de la méthode de troncature précédente où ce choix paraissait arbitraire. Les avantages de la méthode δM résident dans les innovations suivantes :

- Grande précision pour les petites valeurs de M : tant que la matrice $M \times M$ est suffisamment petite pour être calculée, les résultats sont satisfaisants et ce malgré une forte asymétrie de la fonction de phase,
- Convergence rapide, mais possible présence d'oscillations,
- Conservation automatique du flux,
- Passage à la limite transparent : la troncature tend vers 0 quand M tend vers l'infini, l'aspect arbitraire de la troncature s'en trouve grandement diminué,
- Calculs plus courts : pour reconstituer les fonctions de phase, le nombre de coefficients d'expansion est limité.

La plupart des erreurs entre la fonction de phase et sa représentation par un nombre fini de coefficients se situent pour des grands angles de diffusion. C'est pourquoi les fonctions de phase qui présentent un pic de rétrodiffusion sont mal représentées par cette méthode : les oscillations introduites peuvent être gênantes lors de la création des matrices de diffusion. D'autres méthodes ont été élaborées pour pallier ce problème.

La **méthode MS** ^[83] est basée sur la séparation des rayonnements provenant de la diffusion multiple et de la diffusion simple. L'idée est de supprimer les aberrations introduites par la méthode δM sur les oscillations de la fonction de phase tronquée. La luminance \vec{L}_1^{tr} issue de la diffusion simple est beaucoup plus affectée par ces oscillations que celle issue de la diffusion multiple. Il s'agit donc de soustraire à la partie tronquée (\vec{L}^{tr}), la part de la luminance attribuée à la diffusion simple (\vec{L}_1^{tr}) puis, de lui substituer la luminance (\vec{L}_1) issue de la diffusion simple et provenant de la fonction de phase initiale sans oscillation :

$$\vec{L} = \vec{L}^{tr} - \vec{L}_1^{tr} + \vec{L}_1 \quad \text{Eq. 125}$$

Cette technique permet de conserver une grande précision par rapport à la méthode δM mais nous préférons utiliser la **méthode δfit** ^[82] dans nos applications. En effet, cette dernière méthode associe la troncature à une procédure de « delta-approximation » en donnant une qualité de résultats bien supérieure à celle obtenue jusqu'à présent. Les problèmes rencontrés pour les grands angles de diffusion sont supprimés et le nombre de coefficients calculés est réduit tout en améliorant la précision et les temps de calcul. Le principe consiste à remplacer les coefficients de Legendre par des coefficients calculés à partir d'une procédure de lissage basée sur la méthode des moindres carrés pondérée. Cette technique revient à minimiser l'erreur relative ε entre la fonction de phase tronquée $M_{ij}^{tr}(\mu)$ et la fonction de phase initiale $M_{ij}(\mu)$. On définit les variables suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \sum_l \rho_l \left(\frac{M_{ij}^{tr}(\mu_l)}{M_{ij}(\mu_l)} - 1 \right)^2 \\ M_{ij}^{tr}(\mu_l) = \sum_{n=0}^{N_{str}} c_{ij,n} \cdot P_n(\mu_l) \end{cases} \quad \text{Eq. 126}$$

où μ_l et ρ_l correspondent respectivement à l'angle de diffusion et à son poids (*cf.* notion de quadrature), N_{str} est le nombre de coefficients nécessaires pour calculer la fonction de phase avec la précision voulue. On trouve les valeurs des $c_{ij,n}$ en résolvant les équations suivantes :

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial c_{ij,n}} = 0 \quad \text{où} \quad n = 0 \dots N_{str} \quad \text{Eq. 127}$$

Soit :

$$\sum_l \frac{P_k(\mu_l)}{M_{ij}(\mu_l)} \cdot \rho_l \cdot \left(\sum_{n=0}^{N_{str}} \frac{c_{ij,n} \cdot P_n(\mu_l)}{M_{ij}(\mu_l)} - 1 \right) = 0 \quad \text{Eq. 128}$$

La nouvelle fonction de phase est ensuite normalisée telle que :

$$M_{ij}^{\delta fit}(\mu) = \frac{1}{1 - f_{ij}} \cdot M_{ij}^{tr}(\mu) \quad \text{Eq. 129}$$

Le pic avant est bien supprimé car les poids des angles proches de 0° sont nuls. Le coefficient $c_{ij,0}$ est malgré tout pris en compte grâce au facteur de troncature $f_{ij} = 1 - c_{ij,0}$. Il est nécessaire d'ajuster ensuite les sections efficaces d'extinction et l'albédo de diffusion simple pour soustraire le pic avant qui a été supprimé de la section de diffusion (*cf.* Eq. 118). Les variations de la fonction de phase pouvant être rapides, on apportera beaucoup d'attention aux processus d'interpolation et d'intégration : une interpolation de Lagrange entre 4 points permet de tenir compte de la courbure de la fonction. Cette méthode ne conserve que les petits coefficients et déduit les autres coefficients en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés (appliquée à l'erreur relative pour chaque angle de diffusion). Au final, c'est la méthode δfit qui est intégrée dans notre modèle pour simuler les fonctions de phase ayant de forts pics de diffusion et diminuer le nombre de coefficients de Legendre nécessaire à la restitution de ces fonctions. Dans les autres cas (*i.e.* pour des fonctions plus modérées), nous utilisons :

- soit un développement limité avec un nombre de termes suffisants à une bonne représentation, ce qui revient à trouver M dans l'Eq. 124 tel que $f_{ij} = 0$,
- soit une approximation δM afin de réduire le nombre de termes à considérer.

Toutes les méthodes présentées précédemment permettent de limiter le nombre de coefficients dans la décomposition en série de Legendre (cf. Figure 38a) et de diminuer les temps de calcul. Ici, en dessous de 23 coefficients, le premier élément de la matrice de Mueller n'est plus retrouvé avec exactitude car, même si le pic de transmission est parfaitement identifié, des oscillations apparaissent pour les autres angles de diffusion. Dans la décomposition en série de Legendre, un nombre minimum de coefficients est donc nécessaire pour modéliser correctement les fonctions de phase.

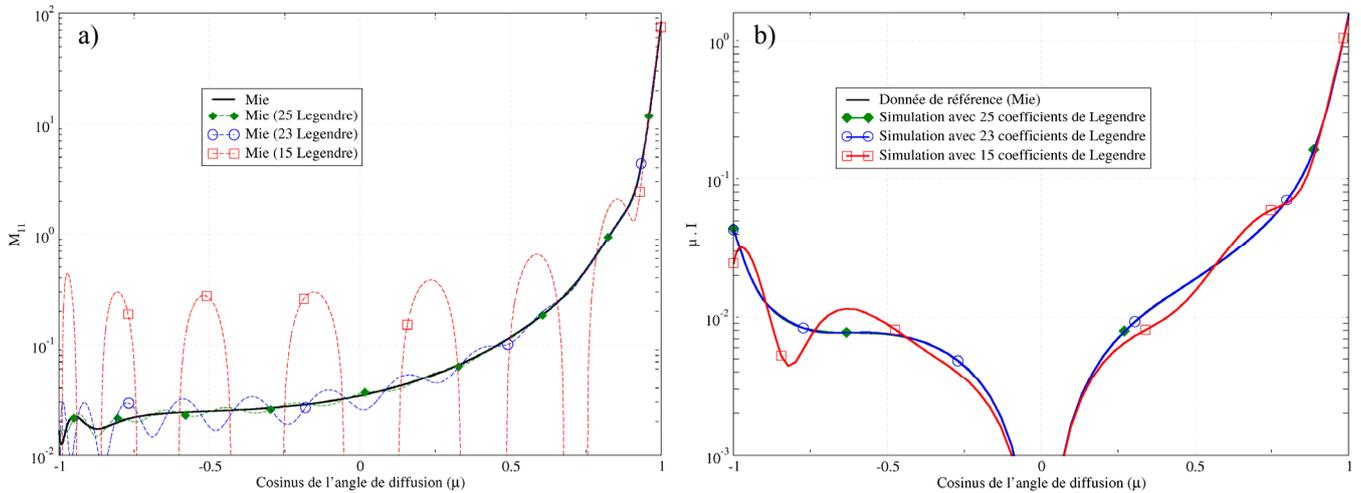


Figure 38 – Fonction de phase non-tronquée, réduction du nombre de coefficients de Legendre.

- a) Fonctions non-tronquées avec réduction du nombre de coefficients de Legendre dans la décomposition polynômiale.
 b) Influence de la représentation de la matrice de Mueller sur la luminance diffusée.

A ce stade de l'étude, il est important de regarder l'impact de la limitation du nombre de coefficients de Legendre sur les luminances diffusées. La réduction du nombre de polynômes s'effectue sans modification de la diffusion polarisée comme le montre la Figure 38b. Le nombre de coefficients de Legendre sera limité à 23 pour obtenir le plus de précision possible sur la luminance diffusée. On évite ainsi l'apparition d'oscillations sur la courbe de *BRDF-BTDF*. Cette décomposition ne modifie pas les niveaux de diffusion, seul le comportement angulaire est changé par rapport à la diffusion réelle. Une attention particulière sera donc portée sur le nombre de termes à prendre en compte pour limiter les temps de calculs sans détériorer les fonctions de phase.

Chami M. *et al.*^[79] ont montré l'intérêt de l'approche par troncature lorsque les fonctions de phase sont beaucoup plus piquées vers l'avant que celles que nous utilisons. Ainsi, la troncature divise par dix le nombre de coefficients dans une décomposition en série de Legendre pour des fonctions telles que la fonction de Petzold qui modélise parfaitement la diffusion de particules présentes dans les océans ($0,1 \mu\text{m} < r_g < 50 \mu\text{m}$). Nous ne développerons pas ici les travaux de Chami M. *et al.*^[79] où les avantages de la troncature sont largement discutés. Dans notre cas, pour des particules de latex en suspension dans l'eau et des rayons moyens voisins de la longueur d'onde, ces méthodes ne permettent pas de gagner des temps de calcul significatifs. Toutefois, elles deviennent indispensables lorsque r_g est grand devant λ_0 .

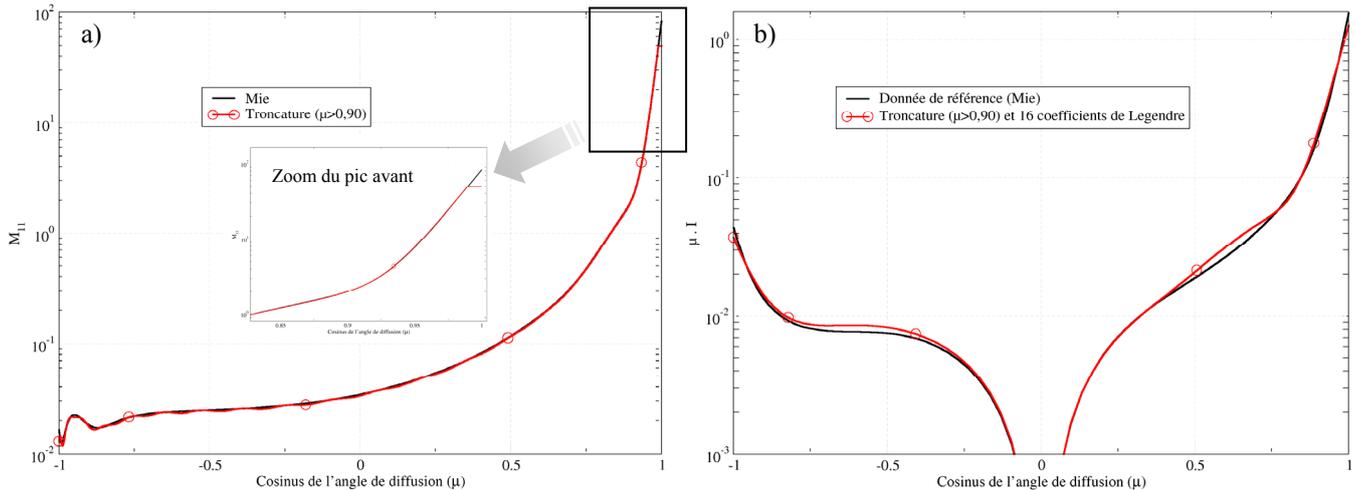


Figure 39 – Fonction de phase tronquée par une méthode de delta-approximation (δM).

- a) Fonction tronquée avec suppression du pic avant puis réduction du nombre de coefficients de Legendre.
 b) Influence de la représentation de la matrice de Mueller sur la luminance diffusée.

La luminance qui est diffusée après la troncature de la matrice de Mueller à 16 termes au lieu de 25 est représentée sur la Figure 39. Dans cette représentation, le coefficient de troncature est $f_{11} = 0,92$ lorsque le pic avant est supprimé pour les angles $\mu > 0,90$. Les paramètres radiatifs à considérer (ω^{tr} et τ^{tr}) sont également modifiés à partir de l'Eq. 118. La $BRDF-BTDF$ est parfaitement retrouvée avec une décomposition en série de Legendre qui considère 16 coefficients. Des oscillations commencent à apparaître et ne permettent pas de descendre en dessous de ce nombre de coefficients. Cette méthode présente l'avantage de diminuer le nombre de coefficients par rapport au cas où aucune troncature n'était effectuée. Dans notre cas, les fonctions de phase ne sont pas suffisamment piquées vers l'avant pour justifier l'utilisation d'une troncature mais nous conservons cette approche pour des particules de grandes tailles devant la longueur d'onde où la méthode δfit pourra alors remplacer avantageusement la méthode δM .

Nous venons de voir qu'il était possible de diminuer le nombre de coefficients de Legendre lors de la décomposition de la matrice de Mueller dans cette base polynômiale. Ainsi, les temps de calculs pour une itération (*i.e.* pour un calcul de diffusion) sont diminués. Néanmoins, le nombre de paramètres demeure important et le vecteur de Stokes diffusé n'est pas toujours comparable à celui obtenu dans le cas réel. D'autre part, aux paramètres décrivant la matrice de Mueller tronquée, s'ajoutent les coefficients de troncature f_{ij} . Enfin, chacun des groupes de paramètres utilisés pour chaque terme de la matrice de diffusion ne saurait être indépendant des autres. En effet, toutes les fonctions de la matrice de Mueller sont reliées entre elles. C'est pour cette raison que d'autres solutions doivent être envisagées.

2.3 UTILISATION DE FONCTIONS MODELES

Dans la majeure partie des cas, il est préconisé de modéliser les différentes fonctions de phase par des fonctions analytiques approchées. Nous allons regarder si cette démarche régulièrement appliquée en optique non polarisée, peut être adaptée avec des données polarisées *i.e.* sur les 16 éléments de la matrice de diffusion. Pour des milieux anisotropes, le nombre de termes à identifier est réduit si les fonctions de phase de type double Henyey Greenstein notées dHG^[75] (3 termes) ou de type Nicolau (4 ou 5 termes) sont employées.

On définit la fonction d'Henyey Greenstein (HG) pour chaque angle quadratique μ par :

$$P_{HG}(\mu) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2 \cdot g \cdot \mu)^{3/2}} \quad \text{Eq. 130}$$

...où $g \in [-1,1]$ est le coefficient d'asymétrie. Le rayonnement est diffusé majoritairement vers l'avant si $g > 0$, la diffusion est isotrope si $g = 0$ et le rayonnement est majoritairement rétrodiffusé si $g < 0$. La variable g est l'unique paramètre à considérer.

Pour prendre en compte simultanément le comportement diffusif et la rétrodiffusion, on associe deux fonctions HG telles que :

$$P_{dHG}(\mu) = a \cdot P_{HG_1}(\mu, g_1) + (1 - a) \cdot P_{HG_2}(\mu, g_2) \quad \text{Eq. 131}$$

...où le nouveau jeu de paramètres est donné par $\vec{\beta}_{ij} = \{a, g_1, g_2\}$. Ce vecteur représente ici les paramètres pour l'élément (i, j) de la matrice de Mueller. Le vecteur global $\vec{\beta} = \{\vec{\beta}_{ij}\}$ regroupe tous les paramètres de cette matrice.

Nicolau^[84] ajoute à cette combinaison linéaire une composante isotrope (4 termes). Sur le même principe, on crée deux autres fonctions : Nicolau à extension Rayleigh (composante de type Rayleigh, 4 termes) et Nicolau à extension linéaire (composante anisotrope linéaire, 5 termes).

$$P_{Rayleigh}^{Nicolau}(\mu) = b \cdot P_{dHG}(\mu, a, g_1, g_2) + (1 - b) \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 + \mu^2) \quad \text{avec} \quad \vec{\beta}_{ij} = \{a, b, g_1, g_2\} \quad \text{Eq. 132}$$

$$P_{Linéaire}^{Nicolau}(\mu) = b \cdot P_{dHG}(\mu, a, g_1, g_2) + (1 - b) \cdot (1 + \alpha \cdot \mu) \quad \text{avec} \quad \vec{\beta}_{ij} = \{a, b, g_1, g_2, \alpha\} \quad \text{Eq. 133}$$

En optique non polarisée, la simplicité d'utilisation de ces fonctions modèles et le faible nombre de paramètres en constituent les principaux avantages. L'usage de la fonction HG est généralement suffisant pour reconstituer des fonctions de phase fortement piquées. Toutefois, les fonctions analytiques s'avèrent être inadaptées pour des milieux dont la matrice de diffusion complexe requiert une modélisation plus fine.

L'intérêt des fonctions de phase modèles n'est pas de représenter exactement une fonction de phase réelle mais plutôt d'obtenir une fonction équivalente dans un processus inverse où la diffusion globale resterait inchangée. Dans notre démarche, nous cherchons à retrouver une matrice de Mueller la plus proche possible de la réalité car elle est porteuse d'information sur les propriétés microphysiques du milieu. La notion d'équivalence n'est pas suffisante et il sera nécessaire de retrouver, le plus finement possible, la matrice de diffusion. Dans ce qui suit, nous regardons l'influence et les écarts qu'elles peuvent engendrer sur la diffusion de la lumière.

Nous considérons le premier élément de la matrice de phase de particules de latex en suspension dans de l'eau. La Figure suivante présente les différentes fonctions de phase obtenues en fonction du type de fonction modèle choisi, sans aucune approximation (δM par exemple).

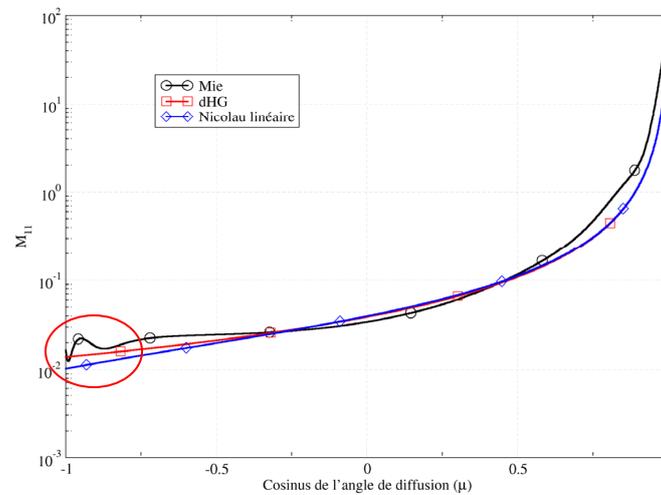


Figure 40 – Fonction de phase réelle et fonctions modèles ajustées.

La fonction modèle dHG analytique est ajustée à la fonction de phase donnée par le calcul de Mie du terme $M_{11}(\mu)$, en tenant compte du paramètre d'asymétrie de la fonction de phase. Avec un coefficient de corrélation proche de 0,933 les paramètres définis dans l'Eq. 131 sont reportés dans le Tableau 4. Ce type de fonctions modèles ne permet pas de représenter fidèlement le calcul de Mie, notamment en rétrodiffusion où les variations angulaires disparaissent (*cf.* Figure 40). Avec 5 termes, la fonction de Nicolau à extension linéaire est également représentée sur la Figure précédente.

Fonction dHG	Fonction de Nicolau à extension linéaire
$a = 0,999941$	$a = 0,99925$
$g_1 = 0,85723$	$g_1 = 0,899974$
$g_2 = -0,00339$	$g_2 = -0,002115$
-	$b = 0,99913$
-	$\alpha = 9,99996$

Tableau 4 – Paramètres des fonctions modèles pour des particules de latex de rayon $r_g = \lambda$.

L'impact de cette représentation des fonctions de phase sur la luminance diffusée est observé sur la Figure 41. Dans cet exemple, on considère des particules de latex en solution aqueuse (avec passage d'interfaces en quartz). Les matrices de diffusion non polarisées sont représentées par le premier terme M_{11} (les autres étant arbitrairement nuls). Sur les $BRDF-BTDF$ simulées à partir d'un éclairage non polarisé, on observe un bon accord entre les résultats obtenus pour les deux fonctions modèles (dHG et Nicolau à extension linéaire). Toutefois, ces courbes ne correspondent pas au calcul effectué avec une fonction de phase réelle (calcul de Mie et conditions de calcul identiques *i.e.* $\tau = 1$ et $\omega = 1$). Le changement du niveau de la $BRDF$ est suffisant pour entraîner une erreur certaine sur la détermination des paramètres radiatifs. La luminance diffusée est essentiellement modifiée pour les angles proches de la normale. En transmission, cette différence est due au fait que les fonctions analytiques ne modélisent pas parfaitement le pic avant de notre fonction de phase. En réflexion, les « oscillations » disparaissent complètement dans le traitement analytique de la fonction de phase (*cf.* Figure 40). Pour $\mu \approx -1$, les variations de la luminance diffusée sont liées à la granulométrie du milieu. Cette perte d'information peut entraîner une identification moins performante de la distribution en taille des diffuseurs et avoir un impact sur l'albédo retrouvé. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

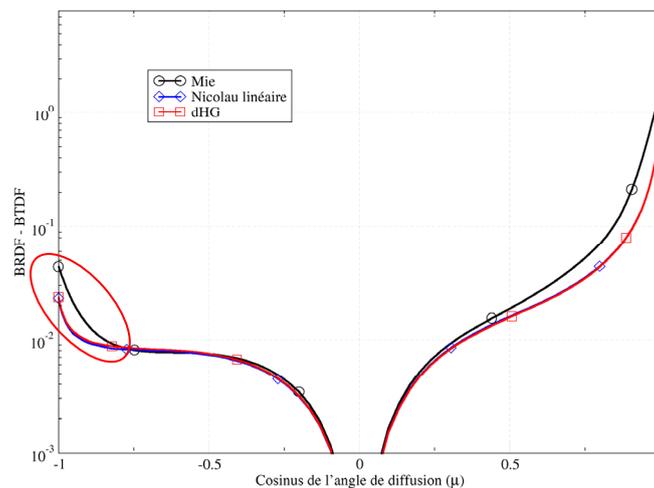


Figure 41 – $BRDF-BTDF$ non polarisées obtenues à partir de fonctions de phase réelles ou modèles.

La technique d'optimisation basée sur des fonctions modèles, même si elle limite le nombre de paramètres, peut introduire des erreurs significatives dans la matrice de Mueller retrouvée. De plus, le nombre de paramètres à prendre en compte en optique polarisée devient rapidement important. Par exemple, dans le cas précédent, un minimum de 3 paramètres par élément non nul de la matrice de diffusion serait nécessaire. Ce nombre bien qu'inférieur au cas des matrices tronquées demeure trop important pour faciliter la convergence des méthodes d'optimisation^{[71][76]}.

2.4 REPRESENTATION FINALE DE LA MATRICE DE PHASE

Nous venons de décrire les différentes méthodes qui permettent de diminuer le nombre de paramètres mis en jeu lors de la *paramétrisation* de la matrice de diffusion. Toutefois, en lumière polarisée, ce nombre de paramètres est rapidement multiplié par le nombre d'éléments présents dans la matrice de diffusion. Une représentation analytique de la matrice de Mueller n'est donc pas favorable dans notre démarche d'optimisation en optique polarisée.

Il est aussi à noter que la paramétrisation de tel ou tel terme de la matrice de Mueller soulèverait des questions quant aux relations entre les différents jeux de paramètres retrouvés. En effet, physiquement, les différents termes de la matrice de Mueller ne sont pas indépendants. Autrement dit, une optimisation de ces paramètres devrait vérifier un certain nombre de contraintes pour que la solution finale de la matrice de Mueller corresponde à une réalité physique.

A chaque itération du processus d'optimisation des paramètres radiatifs, la reconstitution globale de la matrice à partir de paramètres microphysiques nous paraît plus adaptée à notre cas d'étude : cette méthode a le mérite de représenter les matrices de Mueller sans aucune approximation dans leur prise en compte et respecte les critères de dépendance entre les différents termes de cette matrice préalablement évoqués. Néanmoins, elle requiert des hypothèses faites sur ces paramètres microphysiques. La connaissance d'une forme de la granulométrie et de l'indice des diffuseurs constituent les limitations principales de cette approche. La morphologie des particules est aussi imposée et ne nous permet de considérer que le cas de particules sphériques équivalentes.

Ainsi, le nombre de paramètres mis en jeu est limité à quelques termes pour l'ensemble de la matrice et l'adaptation du module d'optimisation est facile à mettre en œuvre. A chaque nouvelle itération dans le processus d'optimisation, nous reconstituons la matrice de diffusion à partir de la granulométrie définie par les variables r_g et σ_g (*cf.* définition des distributions en taille dans le chapitre II). Tous les autres paramètres (indice, type de loi de la distribution en taille...) sont supposés invariants. On notera que dans un premier temps, nous nous limiterons à une granulométrie monodisperse.

Nous avons pu constater que le calcul de ces matrices pour des particules de petites tailles (devant λ) est rapide. Les temps de calcul augmentant en même temps que la taille des diffuseurs, il est alors judicieux de constituer des bases de matrices pour différentes valeurs de paramètres (indices des diffuseurs et du milieu hôte, rayon des diffuseurs) et d'intégrer ces matrices sur la granulométrie correspondante aux paramètres optimisés. Cette étape demande des calculs préliminaires assez importants mais a l'avantage de n'être réalisée qu'une seule fois. On notera que cette solution n'est pas retenue ici mais qu'elle est facilement adaptable par la suite, une fois que la démarche proposée sera validée.

La troncature des fonctions est ensuite employée pour diminuer le nombre de coefficients dans la décomposition en série de Legendre en relation avec la quadrature utilisée et réduire ainsi les temps de calculs pour la résolution de l'ETRP.

3 ÉTUDE DE SENSIBILITE DE LA DIFFUSION POLARISEE

L'optimisation de données polarisées est basée sur la minimisation de fonctions « objectifs ». Pour que cette minimisation soit efficace, il est indispensable de bien choisir les fonctions qui soient sensibles à l'évolution des différents paramètres. Dans le meilleur des cas, cette évolution ne doit dépendre que d'un seul paramètre à la fois. On remarquera qu'en optique non polarisée et en diffusion isotrope (milieu optiquement épais) les lobes de diffusion ne sont plus parfaitement corrélés à la fonction de phase : il y a perte d'information sur $P(\theta)$ mais on reste encore sensible au paramètre d'asymétrie de la fonction de phase :

$$g = \langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Delta\Omega} p(\theta) \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \quad \text{Eq. 134}$$

L'apport de la polarisation doit nous permettre d'affiner la détermination des paramètres radiatifs en séparant sur différents domaines angulaires les données les plus sensibles à un seul paramètre. On cherche donc un meilleur conditionnement du système à partir de données polarisées, même pour des épaisseurs optiques assez importantes, tout en supposant que τ est un paramètre à part entière. La minimisation des dépendances entre chacun des paramètres représente le défi de notre étude par rapport aux méthodes non polarisées existantes. Sanchez *et al.*^[89] introduisent les coefficients de sensibilité pour quantifier ce phénomène de dépendances (en non polarisé). Dans un premier temps, nous aborderons l'influence de chacun des paramètres de \vec{x} sur le calcul des coefficients de sensibilité.

En optique non polarisée, la démarche d'optimisation est basée sur la minimisation d'une unique fonction « objectif » F définie pour tous les paramètres (*cf.* travaux de Shanno *et al.*^[95]). On constate que si l'épaisseur optique τ est considérée comme étant un paramètre, le conditionnement du problème n'est pas favorable à la détermination de l'ensemble des variables : la minimisation de F est souvent supposée atteinte alors que la convergence vers les autres paramètres n'est pas complète.

L'étude de sensibilité que nous allons réaliser a pour objectif de séparer F en trois fonctions différentes F_i liées respectivement à l'albédo, à l'épaisseur optique et à la matrice de Mueller. De plus, pour accroître l'efficacité de ces méthodes itératives, il est nécessaire de définir ces fonctions sur des domaines angulaires où les paramètres sont peu interdépendants.

Après avoir rappelé les notions de coefficients de sensibilité et de nombre de conditionnement, une étude de sensibilité sur des données polarisées de référence est effectuée en considérant divers états de polarisation et angles de l'onde incidente. Enfin, nous déterminons le domaine d'emploi des fonctions « objectifs » qui seront ensuite utilisées pour le développement de la méthode d'identification.

3.1 NOTIONS DE COEFFICIENTS DE SENSIBILITE ET NOMBRE DE CONDITIONNEMENT

A l'aide de la méthode que nous avons développée et présentée dans le chapitre précédent, nous résolvons l'ETRP pour un milieu d'épaisseur optique τ , d'albédo ω et dont la diffusion est définie par une matrice de Mueller donnée par une granulométrie. Les vecteurs de Stokes obtenus en sortie sont fonction de l'ensemble de ces paramètres :

$$\vec{L}_{diffusé} = \vec{L}_{diffusé}(\tau, \omega, \vec{\beta}) = \vec{L}_{diffusé}(\vec{x}) \quad \text{Eq. 135}$$

avec par exemple, $\vec{\beta} = \{r_g, \sigma_g\}$ si on considère une granulométrie donnée par une fonction log-normale. Dans ce qui va suivre, nous nous limitons à une granulométrie monomodale afin de simplifier l'établissement de la fonction « coût » associée à la matrice de Mueller.

Les **coefficients de sensibilité** $C_s(\mu_i)$ sont les dérivées partielles du vecteur de Stokes diffusé en μ_i et donnent l'ordre de grandeur de l'influence des $x_j \in \vec{x}$ en transmission ou en réflexion, pour chacun des quatre éléments du vecteur de Stokes. Les différences finies sont utilisées pour effectuer ce calcul. Pour simplifier l'analyse, les valeurs obtenues sont normalisées pour le premier paramètre de Stokes I (cf. Eq. 136). Les autres paramètres Q/I , U/I et V/I étant déjà normalisés par rapport à I , il n'est pas nécessaire de normaliser une nouvelle fois ces coefficients de sensibilité.

Pour $S_{diffusé}(\mu_i) = I$:

$$C_s = \frac{x_j}{S_{diffusé}(\mu_i)} \cdot \frac{\partial S_{diffusé}(\mu_i)}{\partial x_j} = \frac{x_j}{S_{diffusé}(\mu_i)} \cdot \frac{S_{diffusé}(\mu_i; \dots, x_j + \Delta x_j, \dots) - S_{diffusé}(\mu_i; \dots, x_j, \dots)}{\Delta x_j} \quad \text{Eq. 136}$$

Pour $S_{diffusé}(\mu_i) = Q/I$, U/I et V/I :

$$C_s = x_j \cdot \frac{\partial S_{diffusé}(\mu_i)}{\partial x_j} = x_j \cdot \frac{S_{diffusé}(\mu_i; \dots, x_j + \Delta x_j, \dots) - S_{diffusé}(\mu_i; \dots, x_j, \dots)}{\Delta x_j} \quad \text{Eq. 137}$$

Des difficultés d'identification apparaissent lorsque les paramètres sont quasi-dépendants linéairement. Pour chacune des N_μ directions de mesure notée i , l'écart par rapport au zéro $r(\mu_i)$ est donné par :

$$r(\mu_i) = \sum_{j=1}^{N_{paramètres}} a_j \cdot \frac{\partial S_{diffusé}(\mu_i)}{\partial x_j} \quad \text{Eq. 138}$$

La détermination des valeurs optimales des coefficients a_j s'obtient en minimisant la somme quadratique des écarts $r(\mu_i)$ par rapport aux coefficients :

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left(\sum_{i=1}^{N_\mu} r(\mu_i)^2 \right) = 0 \quad \forall j \in [1; N_{paramètres}] \quad \text{Eq. 139}$$

En substituant r_i par sa définition et en adoptant une notation matricielle, les valeurs des coefficients a_j s'obtiennent en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_\mu} \left(\frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_1} \right)^2 & \sum_{i=1}^{N_\mu} \left(\frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_1} \frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_2} \right) & \dots & \sum_{i=1}^{N_\mu} \left(\frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_1} \frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_{N_{\text{paramètres}}}} \right) \\ \sum_{i=1}^{N_\mu} \left(\frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_2} \frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_1} \right) & \sum_{i=1}^{N_\mu} \left(\frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_2} \right)^2 & \dots & \sum_{i=1}^{N_\mu} \left(\frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_2} \frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_{N_{\text{paramètres}}}} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_\mu} \left(\frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_{N_{\text{paramètres}}}} \frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_1} \right) & \sum_{i=1}^{N_\mu} \left(\frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_{N_{\text{paramètres}}}} \frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_2} \right) & \dots & \sum_{i=1}^{N_\mu} \left(\frac{\partial S_{\text{diffusé}}(\mu_i)}{\partial x_{N_{\text{paramètres}}}} \right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{N_{\text{paramètres}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{Eq. 140}$$

Soit $\mathbf{C} \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Si cette **matrice de sensibilité** \mathbf{C} est non singulière, la seule solution homogène est telle que tous les a_j soient nuls. Dans ce cas, la représentation des coefficients par une relation linéaire est impossible et le système est bien conditionné. Si la solution est non nulle, les coefficients sont linéairement dépendants : il est donc plus difficile d'identifier exactement tous les paramètres du système sans commettre d'erreur sur leur détermination. Le **nombre de conditionnement** N_c introduit par Hensel^[88] représente le degré de conditionnement de cette matrice. Il est défini en fonction de la norme de la matrice des coefficients de sensibilité des éléments C_{ij} :

$$N_c(\mathbf{C}) = \|\mathbf{C}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{C}\| \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{C}\| = \sqrt{\sum_i \sum_j C_{ij}^2} \tag{Eq. 141}$$

Ainsi, en sélectionnant judicieusement les composantes du vecteur de Stokes dans des domaines angulaires différents, on cherche à remplir la condition où $\partial S(\mu_i)/\partial x_j$ n'est fonction que du paramètre x_j . Il est alors possible de définir une fonction « objectif » F_j par paramètre. A présent, ces définitions sont appliquées sur des données issues de la simulation de nos milieux diffusants où l'on considère les aspects de granulométrie, d'épaisseur optique et d'albédo.

3.2 ÉVOLUTION ANGULAIRE DES COEFFICIENTS DE SENSIBILITE EN INCIDENCE NORMALE

Les matrices de diffusion sont représentées par des matrices réelles issues de la diffusion de Mie pour des particules sphériques. Elles sont calculées à partir d'un jeu de deux paramètres $\vec{\beta} = \{r_g, \sigma_g\}$ associé à une loi log-normale.

En relation avec la partie expérimentale, nous choisissons de modéliser des particules sphériques de latex dans un milieu aqueux. Le liant est ensuite introduit dans une cuve plate en quartz : le passage des interfaces avec changement d'indice est alors pris en compte dans notre démarche. La présence d'interfaces introduit aussi une certaine dépolarisation du flux diffusé et donc une dépendance des résultats présentés à cette dépolarisation. Ce phénomène est néanmoins représentatif de l'étude de milieux réels. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de l'intégrer à notre approche.

L'éclairement non polarisé ou polarisé rectilignement (verticalement ou horizontalement) est dans un premier temps placé à la normale de la face d'entrée de l'échantillon. Le calcul de la sensibilité est effectué de telle sorte que l'on observe l'influence d'un seul paramètre à la fois, les autres paramètres étant arbitrairement fixés dans nos simulations.

- **Sensibilité à l'épaisseur optique τ**

Le premier paramètre considéré est l'épaisseur optique. Les Figure 42, Figure 43 et Figure 44 représentent les coefficients de sensibilité normalisés $C_s(\mu)$ obtenus pour différents états de la polarisation incidente et différentes valeurs de τ . Tous les autres paramètres radiatifs sont fixés aux valeurs suivantes : $\omega = 1$, $r_g = \lambda_0$ et $\sigma_g = 1,2$. Pour un éclairement à la normale ($\mu_0 = -1$), seuls les deux premiers éléments du vecteur de Stokes sont non nuls dans le plan principal ($\varphi = 0$). C'est donc sur ces deux dernières données que notre étude va porter.

En accord avec l'étude effectuée dans le deuxième chapitre sur la pertinence de l'état de la polarisation incidente, nous avons choisi de considérer les trois états suivants : le cas non polarisé $\vec{L}_{inc} = (1,0,0,0)$ et les états rectilignes vertical $(1,1,0,0)$ et horizontal $(1,-1,0,0)$.

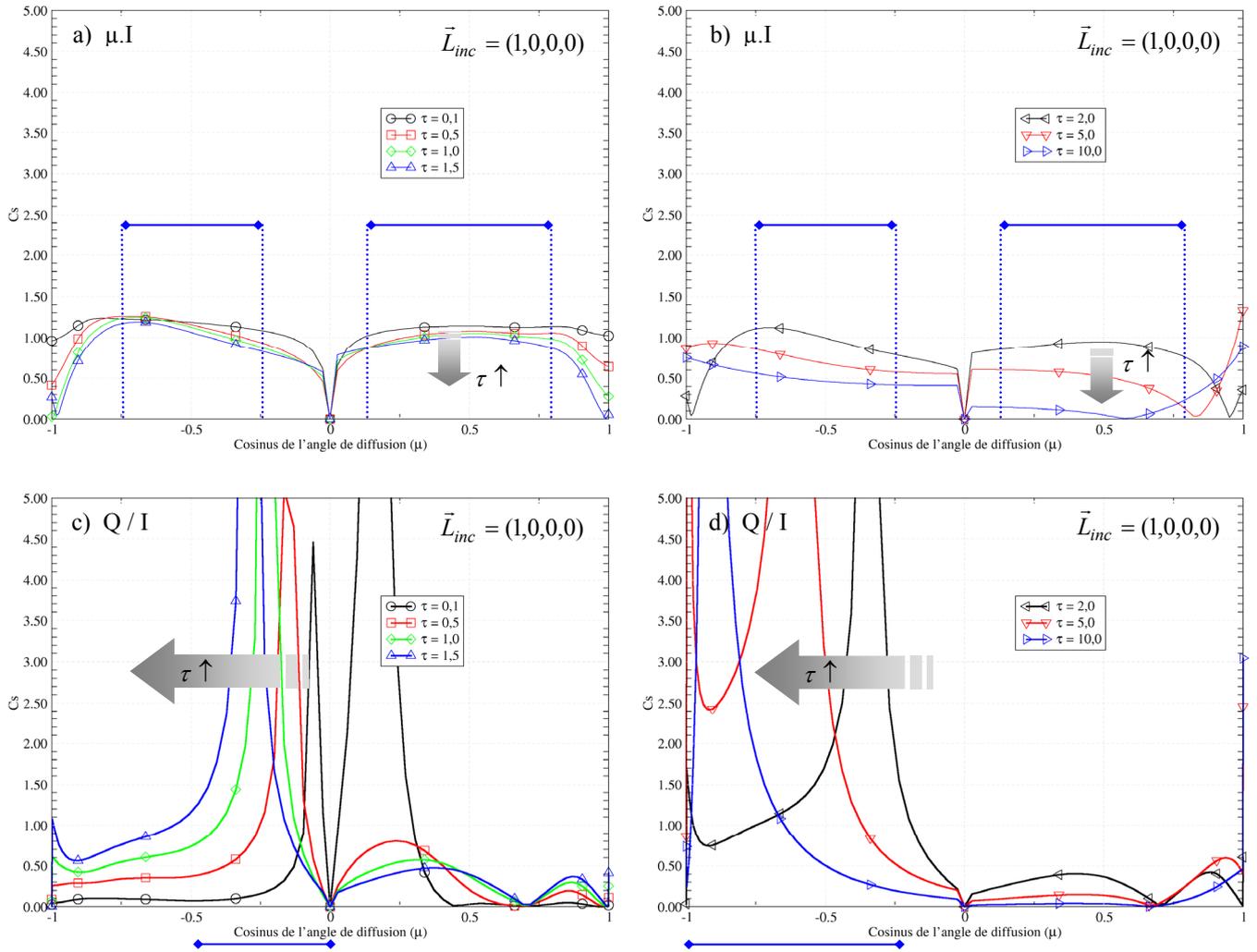


Figure 42 – Coefficients de sensibilité en fonction de τ pour un éclairage non polarisé, avec $\omega = 1$ et

$$r_g = \lambda_0.$$

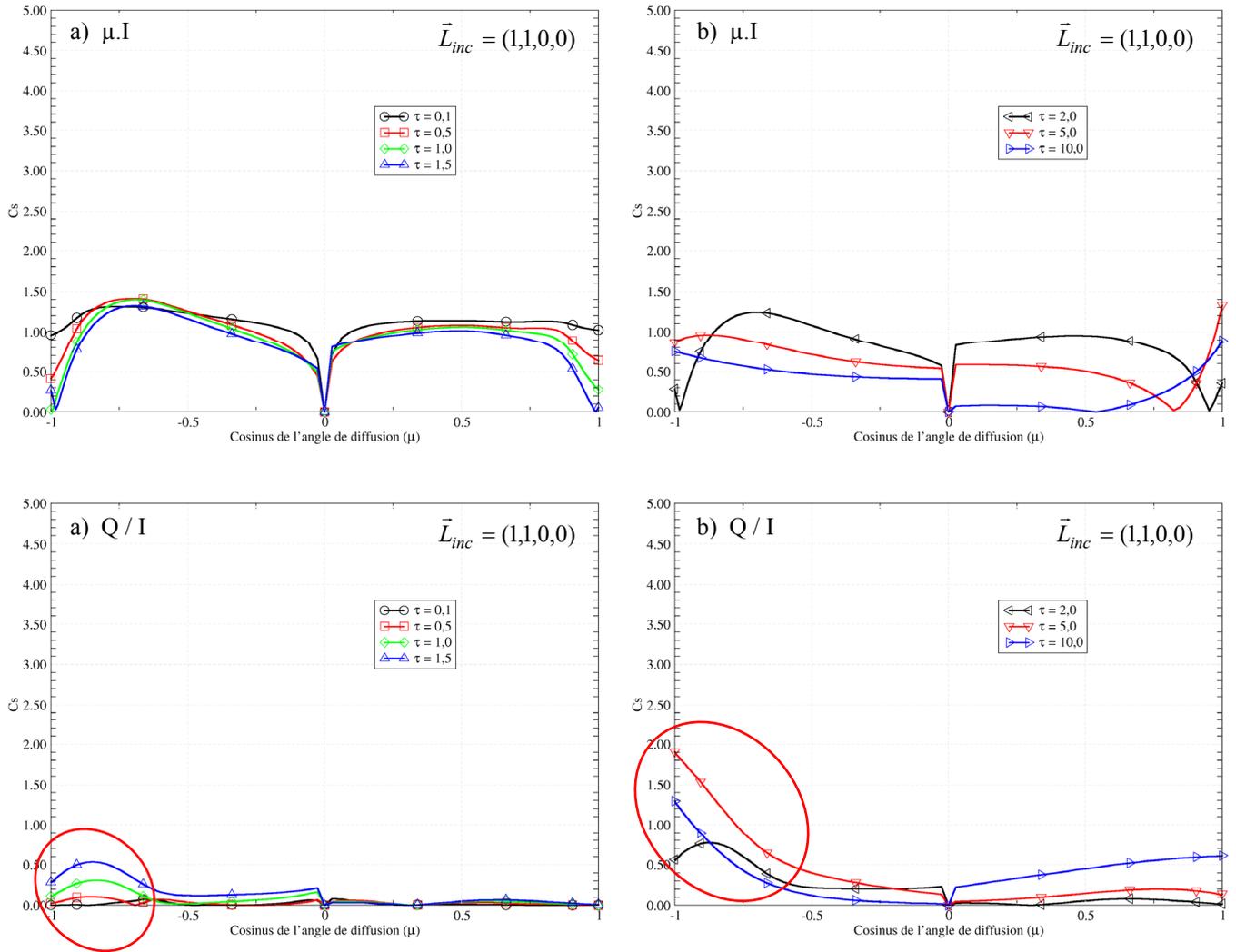


Figure 43 – Coefficients de sensibilité en fonction de τ pour une polarisation horizontale, avec $\omega = 1$ et

$$r_g = \lambda_0.$$

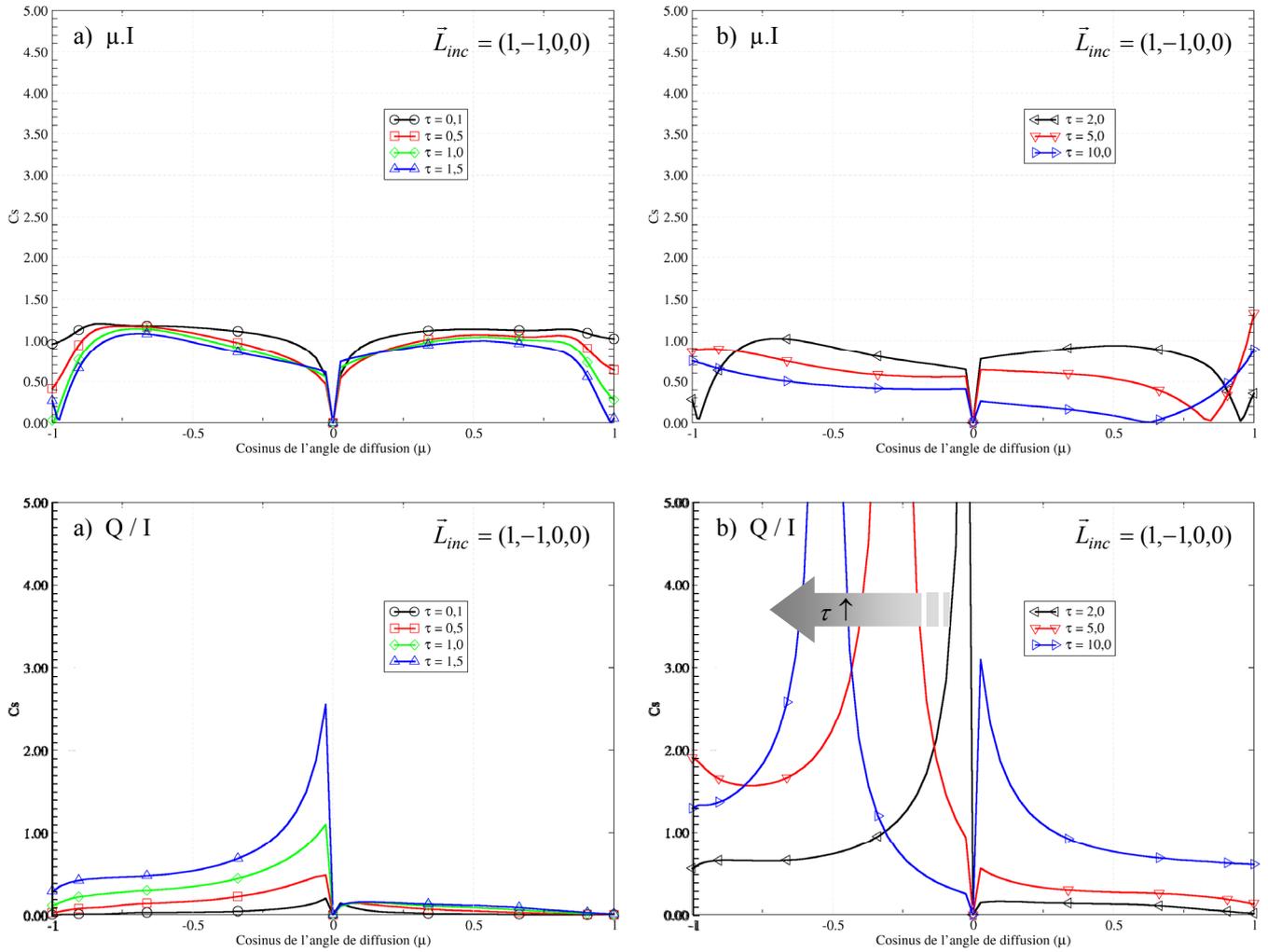


Figure 44 – Coefficients de sensibilité en fonction de τ pour une polarisation verticale, avec $\omega = 1$ et $r_g = \lambda_0$.

Pour les trois états incidents de polarisation, la sensibilité des courbes de $BRDF-BTDF$ à τ est identique. Cette sensibilité est constante sur un grand domaine angulaire pour des épaisseurs optiques inférieures à 5 ; au-delà de cette valeur, la sensibilité diminue. En effet, nous tendons vers une diffusion isotrope et la $BRDF$ tend vers une valeur seuil. Seules la rétrodiffusion et la transmission ont une sensibilité dont le comportement n'est plus angulairement constant. Toutefois, cette sensibilité est plus faible sauf lorsque l'épaisseur optique s'accroît.

Les sensibilités observées sur le rapport Q/I sont fortement liées à l'état de la polarisation incidente. En éclairage **non polarisé**, le pic de sensibilité maximale essentiellement observé en réflexion évolue en fonction de la valeur de l'épaisseur optique. Pour de faibles épaisseurs optiques ($\tau < 1,5$), la sensibilité est maximale pour des directions de diffusion appartenant à l'intervalle $[-0,5;0]$. Le domaine angulaire $[-1;-0,5]$ est à privilégier lorsque $\tau \geq 1,5$. Ces pics résultent d'un point singulier dans la représentation de $C_s(\mu)$ lorsque $S_{diffusé}(\mu_i) \approx 0$ (cf. Eq. 136). Ainsi, le maximum de sensibilité est atteint lorsqu'on parvient à trouver le point de changement de signe du taux de dépolarisation linéaire Q/I . Ce phénomène est surtout connu en astronomie sous la dénomination « *negative polarization* » et a donné lieu à de nombreuses études^{[109][110]}. En **polarisation rectiligne**, seul un état $(1,-1,0,0)$ et une épaisseur optique supérieure à l'unité sont exploitables dans le domaine angulaire $[-0,5;0]$. Dans les autres cas, la sensibilité de Q/I à τ est négligeable et tend vers zéro ($\forall \tau$).

Si l'albédo est modifié ($\omega \neq 1$), le comportement général de la sensibilité est identique : Q/I est l'élément du vecteur de Stokes le plus sensible à l'épaisseur optique. Seul le domaine angulaire d'intérêt est modifié. Ainsi, la Figure 45 représente la partie la plus remarquable de l'étude de sensibilité réalisée pour $\omega = 0,8$ avec $\vec{L}_{inc} = (1,0,0,0)$. Le domaine angulaire à considérer ($\forall \omega$) correspond à l'intervalle $[-0,5;0]$. Ce domaine reste valable quel que soit τ tant que l'albédo est différent de l'unité. Dans ce dernier cas, il sera nécessaire de distinguer les deux intervalles décrits précédemment.

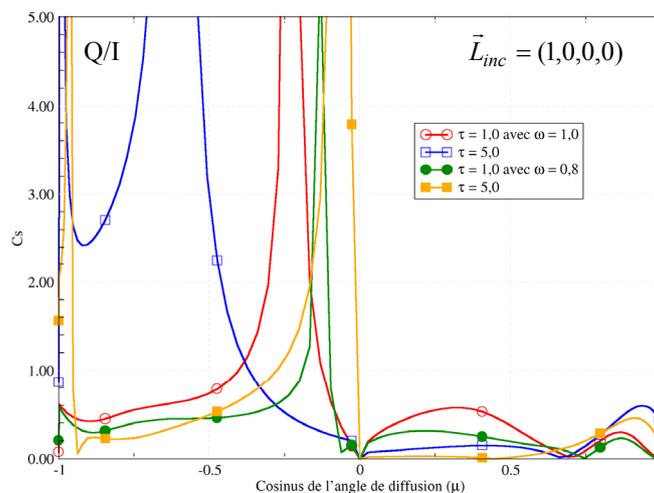


Figure 45 – Evolution de la sensibilité à τ en fonction de la valeur de l'albédo.

L'exploitation de ces résultats démontre que la sensibilité de la *BRDF-BTDF* à τ est quasiment identique sur tous les angles, quelles que soient l'albédo et les épaisseurs optiques des milieux étudiés. Nous conserverons les données en Q/I qui sont beaucoup plus sensibles à l'épaisseur optique sur des domaines angulaires limités (en réflexion essentiellement). En considérant principalement la partie réfléchie du rayonnement, notre méthode d'optimisation reste compatible avec l'étude de matériaux dont la transmission n'est pas accessible expérimentalement (cas des peintures non autoportées par exemple).

- **Sensibilité à l'albédo**

Nous considérons une épaisseur optique constante ($\tau = 1$) et une granulométrie identique au cas précédent ($r_g = \lambda_0$ et $\sigma_g = 1,2$). La Figure 46 représente l'évolution angulaire des coefficients de sensibilité normalisés pour différentes valeurs de l'albédo et différents états de polarisation.

En polarisation rectiligne, le rapport Q/I n'apparaît pas très sensible à l'albédo tant que l'absorption domine ($\omega \neq 1$). En effet, l'absence de diffusion ne favorise pas la dépolarisation du rayonnement incident : en diffusion simple, le vecteur de Stokes diffusé peut s'écrire $(S_{11} \pm S_{12}, S_{12} \pm S_{11}, 0, 0) \cong (1, \pm 1, 0, 0)$ d'où un rapport $Q/I \cong \pm 1$. Sur un large domaine angulaire, les niveaux de sensibilité sont inférieurs à ceux constatés sur les *BRDF-BTDF* lorsque $\omega < 1$.

Dans le cas d'une onde incidente non polarisée, cette sensibilité s'améliore bien qu'elle demeure inférieure à celle des *BRDF-BTDF* sur un large domaine angulaire : en diffusion simple, le vecteur de Stokes diffusé peut s'écrire $(S_{11}, S_{12}, 0, 0)$ d'où un rapport $Q/I \cong S_{12}(\mu)/S_{11}(\mu)$ et une variation angulaire plus marquée.

Le coefficient de sensibilité en *BRDF-BTDF* ne varie pas beaucoup en fonction de l'état de la polarisation incidente. Cette sensibilité est relativement constante sur un large domaine angulaire *i.e.* pour $\mu \in [-0,75; -0,25]$ et $\mu \in [0; 0,75]$. De plus, la *BRDF-BTDF* est d'autant plus sensible à l'albédo que celui-ci augmente.

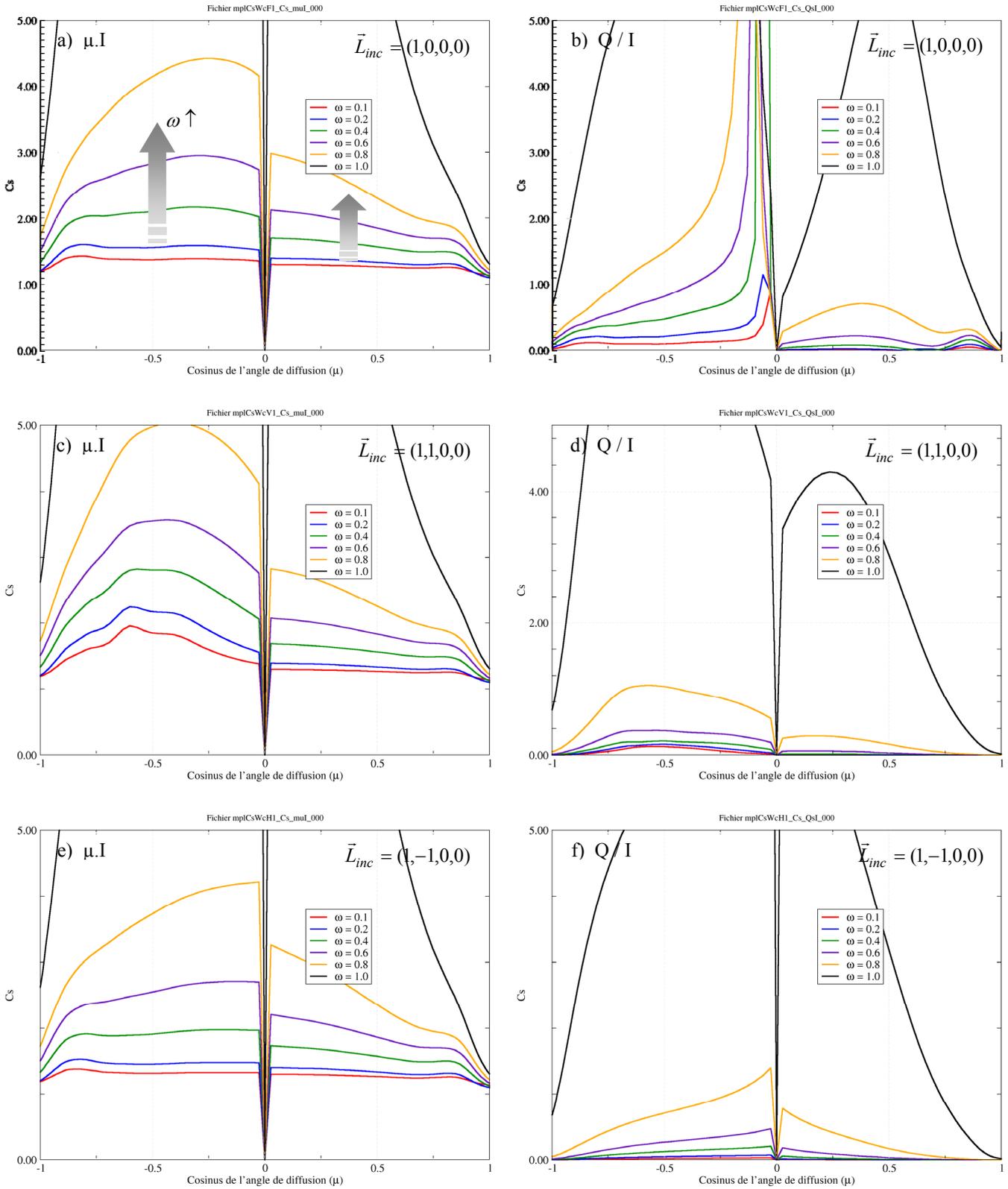


Figure 46 - Coefficients de sensibilité en fonction de ω et de \vec{L}_{inc} avec $\tau = 1$ et $r_g = \lambda_0$.

Le comportement angulaire de la sensibilité est identique pour différentes valeurs de l'épaisseur optique, seuls les niveaux changent comme l'illustre la Figure 47. La sensibilité à l'albédo semble s'accroître lorsque τ augmente, autrement dit lorsque l'on augmente le niveau global de la diffusion. Les remarques faites sur le domaine angulaire d'intérêt restent inchangées quelle que soit la valeur de l'épaisseur optique du milieu.

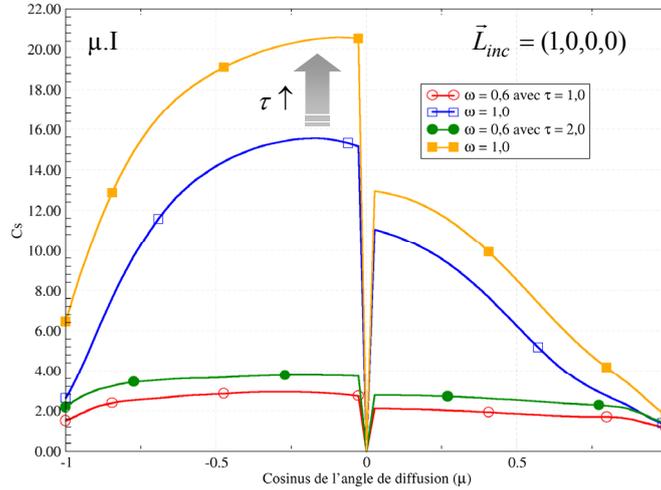


Figure 47 – Evolution de $C_s(\omega)$ pour différentes valeurs de l'épaisseur optique.

• **Sensibilité à la granulométrie**

La distribution en taille des particules $\rho(r)$ est modélisée par une loi log-normale dont les principaux paramètres sont le rayon r_g et la variance σ_g (cf. Chapitre I). Les codes de Lorenz-Mie permettent de calculer la matrice de diffusion pour chaque angle de la quadrature numérique. Mishchenko^[42] a démontré que les deux variables qui caractérisent le mieux la distribution et qui sont prépondérantes dans la matrice de diffusion sont le rayon effectif r_{eff} et la variance effective v_{eff} :

$$r_{eff} = \frac{1}{\langle G \rangle} \cdot \int_{r_{min}}^{r_{max}} \rho(r) \cdot r \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \tag{Eq. 142}$$

$$v_{eff} = \frac{1}{\langle G \rangle \cdot r_{eff}^2} \cdot \int_{r_{min}}^{r_{max}} \rho(r) \cdot (r - r_{eff})^2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \tag{Eq. 143}$$

avec $\langle G \rangle$ tel que^[108] :

$$\langle G \rangle = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \rho(r) \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr \tag{Eq. 144}$$

Dans le cas d'une distribution log-normale de rayon modal r_g et de variance σ_g , on montre que :

$$r_{eff} = r_g \cdot e^{\frac{5}{2} \ln^2 \sigma_g} \quad \text{et} \quad v_{eff} = e^{\ln^2 \sigma_g} - 1 \quad \text{Eq. 145}$$

En prenant r_g comme paramètre et en fixant la variance σ_g , on peut modéliser les variations de r_{eff} indépendamment de celles de v_{eff} . Nous avons choisi de nous focaliser sur ce paramètre. En effet, la prise en compte simultanée de la variance σ_g et du rayon modal r_g comme paramètres pénalise la détermination de la matrice de Mueller qui est principalement gouvernée par le rayon effectif. Les deux paramètres n'étant pas indépendants dans leurs effets, un mauvais conditionnement serait possible.

La granulométrie retrouvée après identification de l'unique paramètre r_g est donc une « granulométrie sphérique équivalente » de variance effective fixée par la valeur de σ_g . C'est une hypothèse limitative. Néanmoins, une approche consistant à faire varier la valeur de σ_g en entrée de l'optimisation pourra être envisagée par la suite.

Nous regarderons cet effet ultérieurement.

Dans cette étude de sensibilité, seule la matrice de diffusion est modifiée *via* le rayon des particules. L'épaisseur optique et l'albédo sont constants et valent respectivement $\tau = 1$ et $\omega = 1$. Sur les courbes de sensibilité de la *BTDF* ($\mu \approx +1$, Figure 48), la sensibilité à la granulométrie est élevée si on considère des angles proches de la normale. Nous avons déjà montré dans le chapitre précédent que les pics de transmission des fonctions de phase dépendaient fortement de la valeur du rayon moyen des diffuseurs (r_g). On retrouve ici ce comportement avec une forte sensibilité pour le domaine angulaire correspondant. Le coefficient de sensibilité en *BRDF-BTDF* reste faible et constant pour les autres directions de diffusion μ , notamment pour un rayon égal à la longueur d'onde d'éclairement λ_0 . On pourra noter que la sensibilité est globalement identique à celle observée sur l'épaisseur optique à l'exception notable de cette zone de diffusion avant.

Pour le paramètre Q/I , la polarisation de l'onde incidente joue un rôle essentiel sur la sensibilité au paramètre de taille comme l'indiquent les résultats de la Figure 48. Pour un éclairage non polarisé (1,0,0,0), le pic correspondant à une forte sensibilité en réflexion se situe dans le domaine angulaire privilégié $[-0,75; -0,25]$. Ce domaine peut être recouvrant avec celui de forte sensibilité à l'épaisseur optique (*cf.* Figure 43). On peut noter aussi une forte sensibilité pour des rayons importants autour des directions de transmission et de rétrodiffusion.

Pour une polarisation rectiligne de type (1,1,0,0), le rapport Q/I est peu sensible à r_g excepté proche de la rétrodiffusion ($\mu \rightarrow -1$). Pour $\vec{L}_{inc} = (1, -1, 0, 0)$ et quel que soit r_g , il existe un unique domaine angulaire ($\mu \in [-0,75; 0]$) où les coefficients de sensibilité sont toujours élevés. Cette zone d'intérêt recouvre celle des coefficients de sensibilité en Q/I lorsque τ est faible (*cf.* Figure 45). Ainsi, nous limitons notre étude aux zones de transmission et de rétrodiffusion pour les courbes de *BRDF-BTDF* et de Q/I .

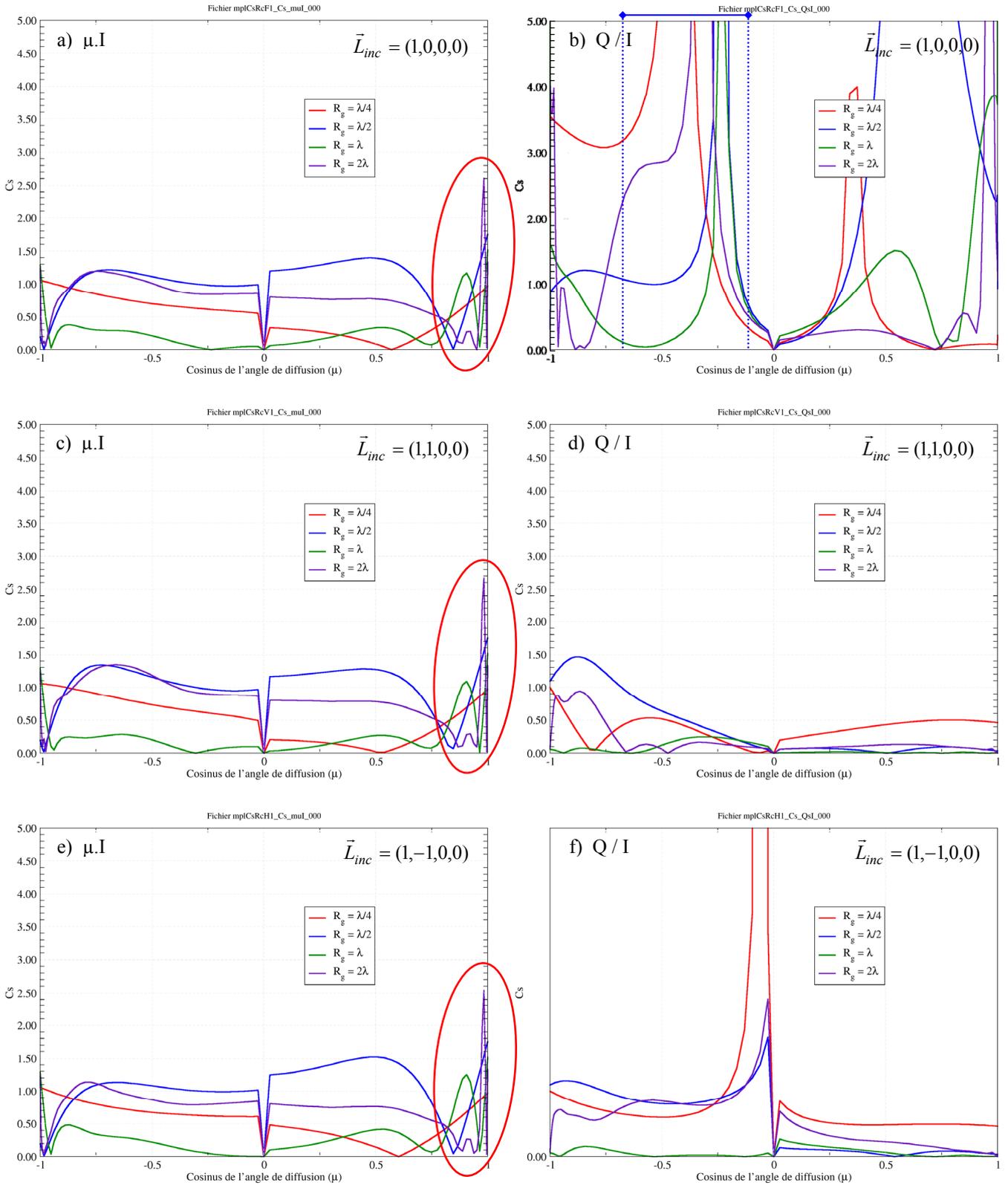


Figure 48 – Coefficients de sensibilité en fonction de r_g et de \vec{L}_{inc} avec $\tau = 1$ et $\omega = 1$.

• Détermination des domaines angulaires d'intérêt en incidence normale

L'épaisseur optique est un paramètre qui conditionne particulièrement le problème d'optimisation des données de diffusion^{[30][111][112]}. Pour faciliter l'optimisation, ce paramètre est donc en général supposé connu. Sur la Figure 49, nous avons représenté le nombre de conditionnement N_c en fonction de τ pour les deux premiers éléments du vecteur de Stokes diffusé (grandeurs normalisées avec $\omega=1$ et $r_g = \lambda_0$). Deux cas sont étudiés : soit l'épaisseur optique est un paramètre de l'optimisation à part entière, soit ce paramètre est exclu de l'optimisation (*i.e.* il est supposé connu).

Dans un premier temps, le nombre de conditionnement est évalué en considérant l'ensemble des directions de diffusion du demi-espace afin de se rapprocher des fonctions de « coût » généralement utilisées dans la plupart des méthodes d'optimisation en optique non polarisée. Nous distinguons simplement la partie réfléchie où $\mu \in]-1;0[$ et la partie transmise où $\mu \in]0;+1[$.

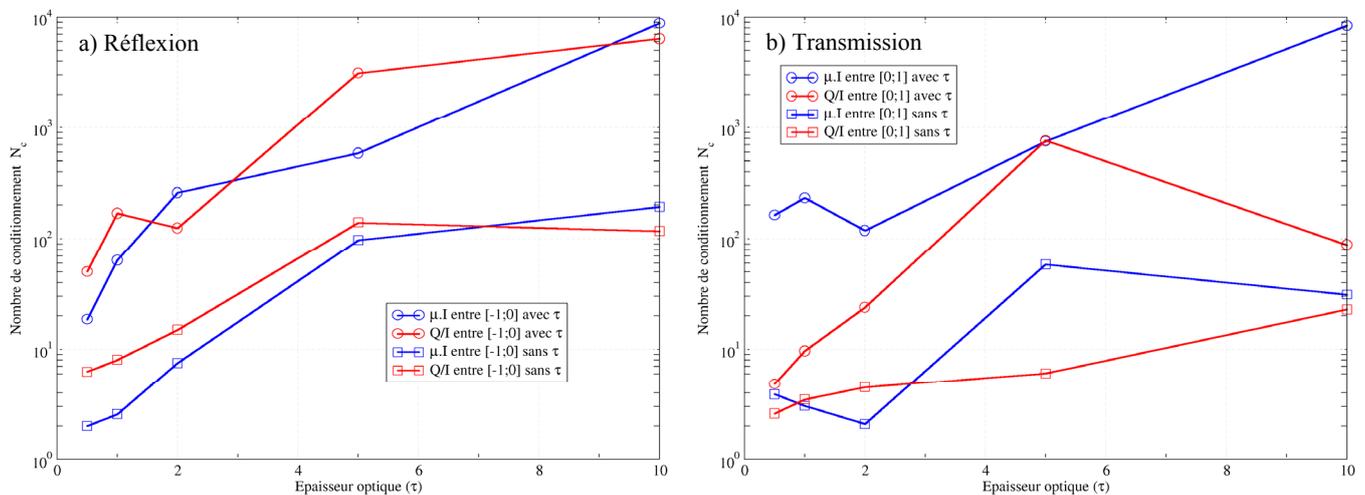


Figure 49 – Evolution de $N_c(\tau)$ avec ou sans τ comme paramètre pour un éclairage incident non polarisé.

Lorsque l'épaisseur optique est considérée comme paramètre dans le vecteur \vec{x} , le problème est plus mal conditionné que lorsque ce paramètre est supposé connu. C'est donc un paramètre important que la méthode d'optimisation doit rapidement estimer afin de faciliter l'indépendance des autres paramètres. D'autre part, on peut globalement constater une baisse du conditionnement lorsque l'épaisseur optique s'accroît. En effet, la diffusion multiple lisse les effets des autres paramètres et diminue leur sensibilité. L'identification devient d'autant plus difficile que l'épaisseur optique est importante.

L'étude de sensibilité nous a permis de distinguer des domaines angulaires où la sensibilité à τ est maximale sur l'élément Q/I . La Figure 50 compare le nombre de conditionnement calculé sur deux domaines angulaires différents :

- Tout le demi-espace tel que $-1,0 < \mu < 0$
- Un intervalle restreint tel que $-0,5 < \mu < 0$ pour $\tau < 1,5$
 $-1 < \mu < -0,5$ pour $\tau \geq 1,5$

Le conditionnement est quasi-équivalent dans les deux cas mais en adaptant l'intervalle, on s'affranchit des oscillations de N_c entre les faibles et les fortes épaisseurs optiques. Pour améliorer le conditionnement, il conviendrait d'adapter continuellement l'intervalle d'intérêt en fonction de la valeur de τ au lieu de considérer seulement deux intervalles. Cela revient à choisir un intervalle qui contient systématiquement le pic de sensibilité à τ . Notre démarche devant rester vraie même si les autres paramètres (ω et r_g) sont modifiés, on limite l'étude à deux intervalles : un pour les épaisseurs optiques faibles, l'autre pour les fortes épaisseurs optiques.

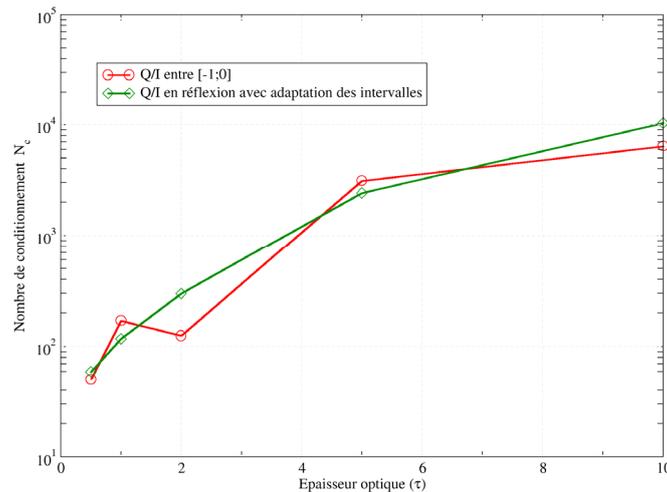


Figure 50 – Evolution de $N_c(\tau)$ en fonction du domaine angulaire choisi.

Les méthodes d'optimisation existantes font souvent appel aux coefficients de sensibilité que l'on retrouve par exemple dans le calcul du gradient de la fonction « coût ». Ces coefficients ne doivent pas être linéairement dépendants si l'on souhaite améliorer le processus d'optimisation. En effet, le calcul d'un vecteur de descente est faussé si le gradient n'est pas linéairement indépendant.

Les simulations numériques précédentes permettent d'identifier les domaines angulaires où, pour chaque variable du vecteur \vec{x} , la sensibilité d'un élément du vecteur de Stokes ($\mu \cdot I$ ou Q/I) est maximale. Ces domaines doivent rester vrais sur une large plage de valeurs des paramètres considérés, quelles que soient ces valeurs sur un domaine de validité borné ($\omega \in [0; 1]$ par exemple). Ils ne doivent pas coïncider avec la définition des intervalles des autres paramètres pour s'affranchir d'une éventuelle inter-dépendance de la ou des fonction(s) « objectif(s) ».

L'état de polarisation de l'éclairement de l'échantillon joue également un rôle important sur la sensibilité du vecteur de Stokes diffusé aux différents paramètres. En polarisation rectiligne, certains domaines angulaires viennent compléter ceux déjà donnés pour un éclairement non polarisé. Par exemple, pour des milieux optiquement épais ($\tau > 5$), la détermination de τ sera facilitée si on considère un état de la polarisation incidente égal à $(1, -1, 0, 0)$. Pour $\tau < 5$, $\omega \approx 1$ et des particules ayant un rayon de l'ordre de la longueur d'onde, l'éclairement non polarisé est suffisant. Dans ces conditions, les domaines angulaires à retenir sont répertoriés dans le Tableau 5. Dans ce qui suit, nous ne travaillerons qu'avec un éclairement non polarisé, sauf indications contraires.

	Epaisseur optique : τ	Albédo : ω	Rayon : r_g
$BRDF$ ou $(\mu \cdot I)^{réfléchi}$	-	$-0,75 < \mu < -0,25$	$-1 < \mu < -0,75$
$BTDF$ ou $(\mu \cdot I)^{transmis}$	-	$0 < \mu < 0,25$	$0,75 < \mu < 1$
$(Q/I)^{réfléchi}$	Si $\omega \approx 1$: $-0,5 < \mu < 0$ pour $\tau < 1,5$ $-1 < \mu < -0,5$ pour $\tau \geq 1,5$ Sinon : $-0,5 < \mu < 0$	-	-
$(Q/I)^{transmis}$	-	-	$0,75 < \mu < 1$

Tableau 5 – Domaines angulaires d'intérêt pour chaque paramètre en éclairement non-polarisé.

- **Détermination des domaines angulaires d'intérêt hors incidence normale**

La même démarche est applicable dans le cas d'un éclairage de l'échantillon en dehors de la normale. Dans ces conditions, la luminance diffusée n'est plus identique dans chacun des plans φ (rupture de la symétrie) et une étude de sensibilité plus complète, élargie à l'angle azimutal s'avère nécessaire.

Les premières simulations démontrent que certains plans φ apportent un complément d'information pour caractériser les milieux avec un angle d'éclairage éloigné de l'incidence normale. Lorsque μ_0 est différent de 1, la luminance diffusée est recomposée à partir de la base $(\bar{L}_{1,m}^{c,\pm}, \bar{L}_{2,m}^{s,\pm})$ définie dans le chapitre II. Ainsi, les éléments U/I et V/I du vecteur de Stokes sont non nuls dans certains cas. Nous présentons dans les pages suivantes quelques résultats issus de l'étude de sensibilité effectuée avec une incidence de 60° sur l'échantillon et un éclairage incident non polarisé qui est ensuite modifié (polarisé) par le passage des interfaces, contrairement au cas de l'incidence normale.

Sensibilité à l'épaisseur optique, hors incidence normale

Dans un premier temps, considérons l'évolution de $C_s(\tau)$ pour un éclairage incident à 60° de la normale de la face d'entrée de l'échantillon (cf. Figure 51). Le comportement angulaire de la *BRDF-BTDF* est différent de celui constaté sur la Figure 42, notamment dans le plan $\varphi = 0^\circ$ où la sensibilité à τ n'est plus constante sur tous les μ . On peut en particulier constater deux zones (en réflexion ou en transmission) où la sensibilité est faible et qui correspondent aux secteurs de diffusion voisins des pics spéculaire ou collimaté définis dans le matériau. On observe probablement un comportement issu d'un effet combiné d'une diffusion préférentielle dans le plan d'incidence et de la présence d'un cône de réfraction.

Le comportement observé sur le taux de dépolarisation Q/I reste inchangé. Il est toujours possible d'utiliser les domaines angulaires définis dans le Tableau 5 pour optimiser le paramètre τ . La dépolarisation de la luminance selon U et V n'apparaît que dans les plans $\varphi \neq 0^\circ$ et $\varphi \neq 180^\circ$ i.e. en dehors du plan d'incidence. En effet, on recompose \bar{L}_{dif} sur une base en *sinus* pour les deux derniers termes du vecteur de Stokes. Les pics de sensibilité maximale observés sur les rapports U/I et V/I pour certains plans de diffusion (cf. Figure 51c et d) pourraient être exploitables dans une méthode d'optimisation en complément de ceux déjà présents sur Q/I . Néanmoins, cette généralisation nécessiterait une étude plus approfondie.

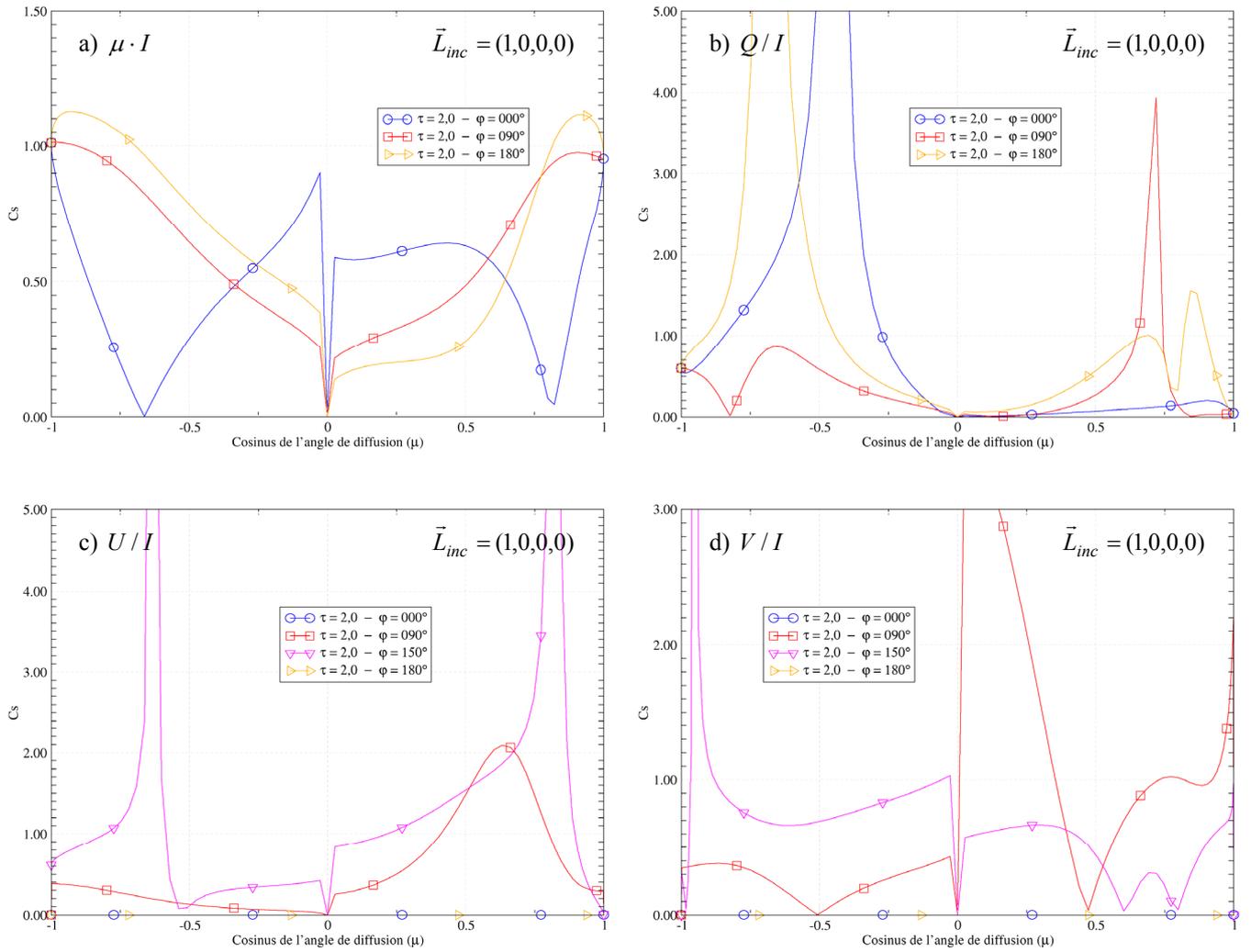


Figure 51 – Sensibilité à l'épaisseur optique, hors incidence normale, pour différents plans φ , avec $\omega = 1$ et $r_g = \lambda_0$.

Sensibilité à l'albédo, hors incidence normale

Hors incidence normale (cf. Figure 52), la *BRDF-BTDF* est toujours aussi sensible à l'albédo que dans le cas de l'incidence normale. On remarque une évolution du comportement dans le plan d'incidence même si hors de ce plan, on retrouve grossièrement le comportement angulaire que nous avons observé pour le cas de l'incidence normale (cf. Figure 46a). De plus, la valeur de $C_s(\omega)$ varie en fonction du plan φ considéré et atteint un maximum dans le demi-plan complémentaire $\varphi = 180^\circ$.

En comparaison avec la Figure 46b, le pic de sensibilité pour l'élément Q/I (cf. Figure 52b avec $\varphi = 0^\circ$) est beaucoup plus étroit et centré sur l'angle $\mu_{0,milieu} = 0,75$ correspondant à l'angle transmis dans le milieu pour une incidence $\mu_0 = 0,5$ après passage des interfaces en quartz.

On notera enfin que les rapports U/I et V/I dans le plan croisé ($\varphi = 90^\circ$) sont très sensibles, en particulier en transmission. En réflexion, les forts niveaux de sensibilité observés pourraient aussi être exploités en complément de la *BRDF* (voire en remplacement) si la transmission n'est pas accessible. En effet, dans cette zone et dans ce plan, les rapports U/I et V/I sont très peu sensibles à l'épaisseur optique.

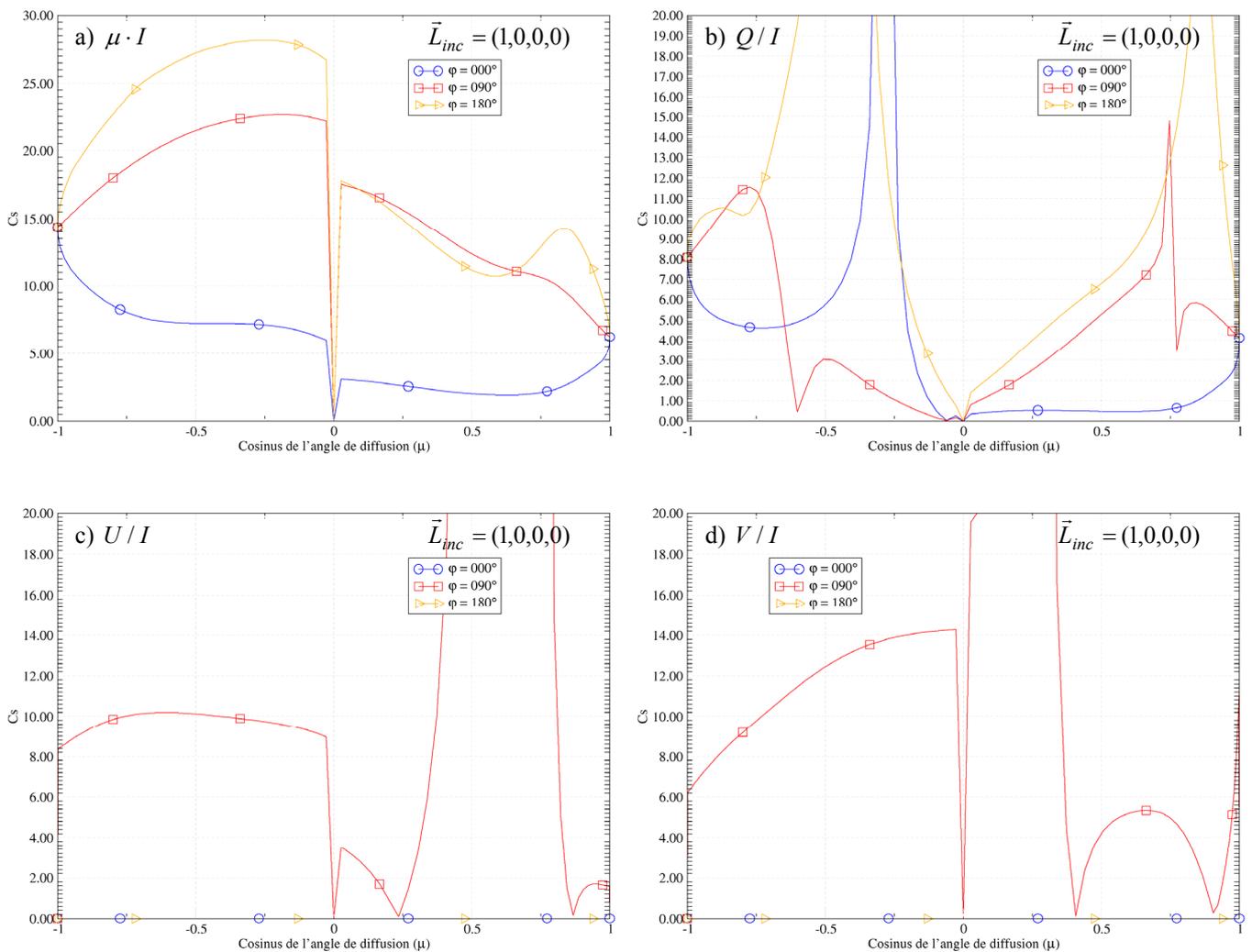


Figure 52 – Sensibilité à l'albédo, hors incidence normale, pour différents plans φ , avec $\omega = 1$, $\tau = 2$ et $r_g = \lambda_0$.

Sensibilité à la granulométrie, hors incidence normale

Cette dernière étude de sensibilité n'apporte pas d'information supplémentaire sur la détermination des domaines angulaires à privilégier lors du processus d'optimisation pour les paramètres Q/I et $\mu \cdot I$. On vérifie bien que la sensibilité maximale pour la $BTDF$ est située autour de la direction incidence $\mu = \mu_0 = 0,5$ et qu'elle est plus importante dans le demi-plan complémentaire. Dans le plan principal, on perd la sensibilité en transmission du rapport Q/I . On retrouve un comportement voisin du cas polarisé rectilignement (cf. Figure 48d et f) en incidence normale, probablement lié au fait que l'interface d'entrée polarise le rayonnement transmis dans le milieu.

Les éléments U/I et V/I ne sont sensibles qu'en transmission (cf. Figure 53c et d). Ces domaines angulaires sont peu différents de ceux observés pour $C_s(\omega)$ et de $C_s(\tau)$, pour les mêmes éléments du vecteur de Stokes et le même plan φ . Par conséquent, il sera difficile d'optimiser conjointement l'albédo, l'épaisseur optique et le rayon à partir de ces données en transmission. Par contre, leurs faibles sensibilités en réflexion renforcent la remarque faite dans le paragraphe précédent à propos de l'intérêt de ces données pour l'identification de l'albédo.

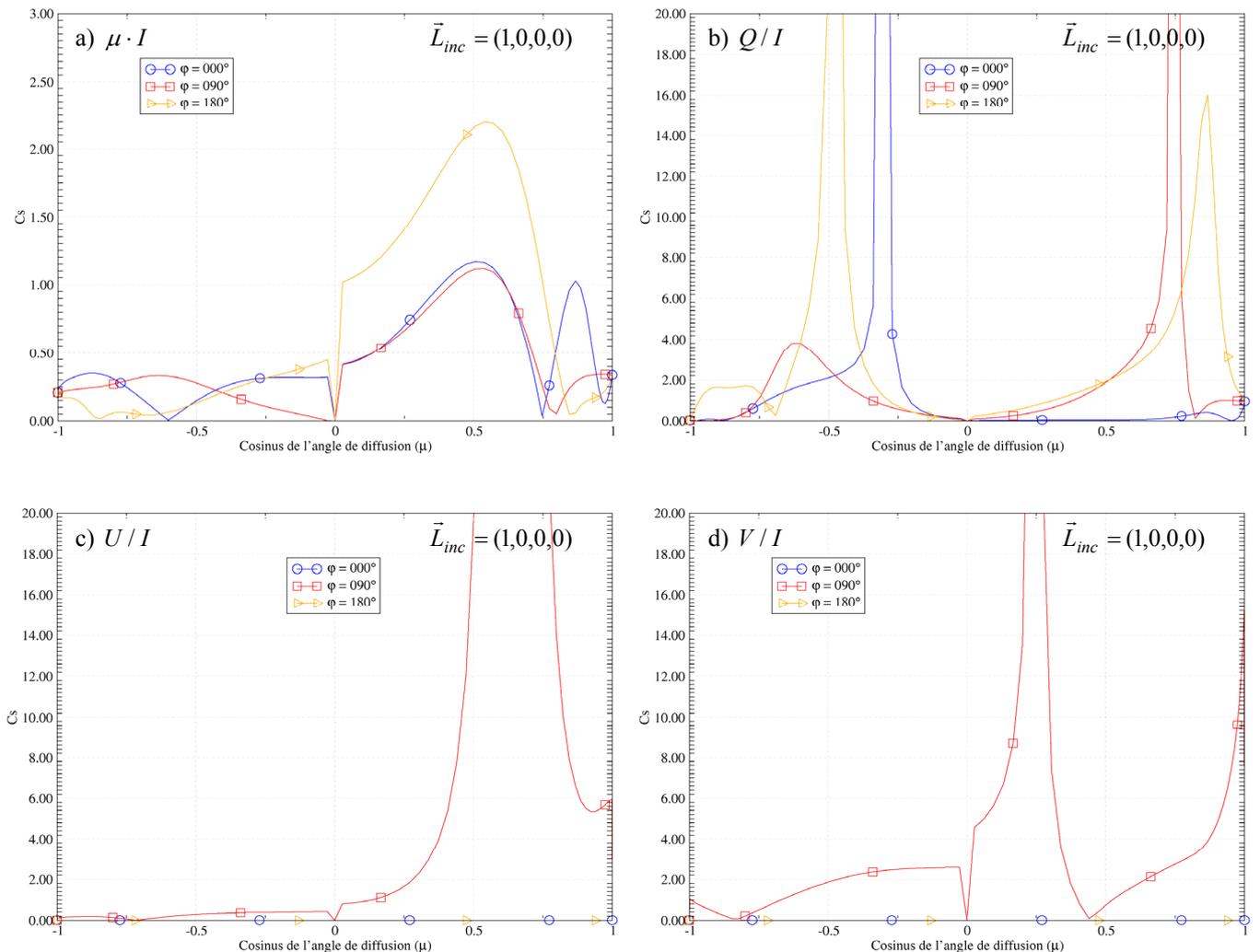


Figure 53 – Sensibilité au rayon, hors incidence normale, pour différents plans φ , avec $\omega = 1$ $\tau = 2$ et $r_g = \lambda_0$.

Synthèse de l'utilisation des simulations hors incidence normale

Même si elle ouvre certaines voies potentielles d'amélioration, l'étude de sensibilité hors incidence normale ne permet pas, en l'état, de dégager un intérêt majeur sur son utilisation dans l'identification des paramètres. Malgré quelques améliorations possibles, certains comportements sont redondants avec les informations que l'on peut obtenir en incidence normale sur les *BRDF-BTDF* ou le rapport Q/I . De surcroît, l'utilisation des autres données que sont U/I ou V/I , à l'exception de certains secteurs angulaires, n'apporte que peu d'éléments. Pour finir, il ne faut pas perdre de vue que la résolution de l'ETRP hors incidence normale requiert des temps de calculs plus importants et que ce paramètre « temps » n'est pas à négliger dans une démarche itérative. En pratique, le banc expérimental que nous avons développé effectue les mesures du vecteur de Stokes diffusé dans le même plan φ que celui de l'éclairement incident. Dans les autres plans de diffusion, les luminances ne sont pas accessibles expérimentalement.

Pour toutes ces raisons, on limitera la suite des travaux sur la méthode d'identification à un éclairage normal de l'échantillon. La minimisation de données polarisée dans différents plans azimutaux peut être considérée comme une perspective au travail présenté, de même que l'utilisation d'une polarisation incidente de type circulaire.

4 IDENTIFICATION DES PARAMETRES EN DIFFUSION POLARISEE

4.1 PRESENTATION DES DIFFERENTES METHODES D'OPTIMISATION

L'analyse de sensibilité a été conduite en fonction de l'état de la polarisation incidente, de l'angle d'incidence sur l'échantillon et du jeu de paramètres \vec{x} . Les conclusions et les remarques faites précédemment en incidence normale sont directement exploitables dans une démarche d'optimisation contrainte où chaque paramètre est borné sur un intervalle donné. Différents modèles d'optimisation existent. Dans notre cas, l'algorithme général est représenté sur la Figure 54 et reste indépendant de la méthode contrainte choisie pour minimiser les fonctions « objectifs ». Le processus itératif est stoppé lorsque la valeur de chaque paramètre converge vers une unique solution. Les critères de convergence sont initialement fixés par l'utilisateur et répondent à certaines conditions sur les techniques de minimisation des fonctions.

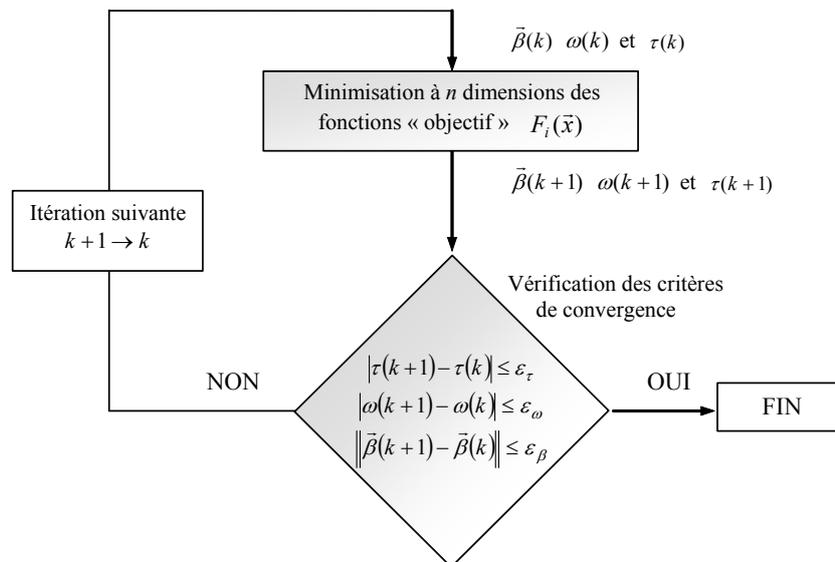


Figure 54 – Schéma d'optimisation des paramètres.

La difficulté de l'optimisation est de concevoir des algorithmes pour évaluer le minimum de F avec des contraintes sur les différentes variables discrètes recherchées. L'émergence de nombreuses méthodes traduit le constat qu'il n'y a pas de méthode unique pour résoudre tous les problèmes d'optimisation.

Historiquement, le premier domaine exploité pour les méthodes d'optimisation est la résolution de systèmes linéaires. Ainsi, la méthode du simplexe élaborée par Dantzig^[105] permet de résoudre des systèmes linéaires de plusieurs milliers de variables. Le second domaine concerne la programmation dite « combinatoire »^[104] où la complexité réside dans l'évaluation d'un système doté de variables discrètes. Enfin, le domaine de l'optimisation

contrainte de fonctions non linéaires est celui auquel nos travaux se rapportent : le système des équations continues et dérivables $\{F_i\}$ est non linéaire et borné sur un intervalle. De nombreux progrès sont encore à faire dans ce domaine puisque les méthodes actuelles ne permettent pas d'évaluer des systèmes ayant de nombreuses variables, rendant indispensable la limitation du nombre de paramètres recherchés. On constate aussi que ces algorithmes peuvent converger vers des optima locaux donc non globaux, ce qui rend délicat leur utilisation en particulier dans l'établissement de critères d'arrêt efficaces.

Différentes techniques s'inscrivent dans le cadre de cette étude. Les méthodes dites de Levenberg-Marquardt^[106] et de RSNR^[107] (*Ridge Stabilized Newton Raphson*) sont fiables et convergent généralement après quelques itérations vers une solution précise. Elles nécessitent le calcul approché d'une matrice Hessienne à chaque itération. Elles sont assez fiables quand il y a peu de valeurs initiales et fonctionnent bien avec des contraintes. Nous choisissons d'en présenter deux autres qui sont couramment utilisées pour retrouver des paramètres bornés à partir de données non polarisées et qui sont beaucoup plus efficaces. Ces deux méthodes sont respectivement une méthode de gradients conjugués et une méthode de type quasi-Newton. Contrairement à la méthode de type quasi-Newton^[31], la méthode du gradient conjugué^[87] utilise un espace mémoire plus faible mais est plus lente et parfois moins fiable.

Dans ce chapitre, ces algorithmes et les fonctions « objectifs » qu'ils minimisent sont utilisés sur des données polarisées issues de simulations numériques. Les fonctions « objectifs » $F_i(\vec{x})$ sont minimisées avec le jeu de paramètres $\vec{x} = \{\tau, \omega, \vec{\beta}\}$. Le vecteur $\vec{\beta}$ représente tous les paramètres qui modélisent la matrice de diffusion : dans le cas d'une approche utilisant des matrices réelles données par une granulométrie, $\vec{\beta}$ est simplement défini par les deux paramètres de la loi log-normale (r_g et σ_g).

Les processus itératifs à l'origine des méthodes d'optimisation employées s'écrivent formellement sous la forme suivante :

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \cdot d_k \quad \text{Eq. 146}$$

où x_k est la valeur du paramètre x_j à la $k^{\text{ième}}$ itération, λ_k est le **paramètre de descente** et d_k est le **vecteur de descente**. Les techniques que nous avons choisi de mettre en œuvre diffèrent suivant les calculs retenus pour déterminer ces deux grandeurs. La direction de descente d_k doit vérifier la relation suivante pour assurer la convergence de la méthode vers un optimum local :

$$\nabla^T F(x_k) \cdot d_k < 0 \quad \text{Eq. 147}$$

où $\nabla F(x)$ est le gradient de F et $\nabla^T F(x)$ est sa transposée.

Dans les **méthodes de Newton**, le vecteur de descente est donné à partir de la matrice Hessienne $\nabla^2 F(x)$:

$$d_k = -\left(\nabla^2 F(x_k)\right)^{-1} \cdot \nabla F(x_k) \quad \text{Eq. 148}$$

Plus généralement, dans les méthodes dites de type Newton^[85], le vecteur de descente s'exprime à partir d'une matrice définie positive \mathbf{A}_k i.e. à partir d'une matrice vérifiant $y^T \cdot \mathbf{A}_k \cdot y > 0$, $\forall y \in \mathfrak{R}^n$, $y \neq 0$:

$$d_k = -(\mathbf{A}_k)^{-1} \cdot \nabla F(x_k) \quad \text{Eq. 149}$$

Pour les méthodes du **gradient conjugué**, le vecteur de descente est une combinaison linéaire du gradient à l'itération k et du vecteur de descente de l'itération précédente ($k-1$).

Un minimum local x^* de $F(x)$ est obtenu si et seulement si :

$$\nabla F(x^*) = 0 \text{ (condition de stationnarité) et } \nabla^2 F(x^*) \text{ est définie positive} \quad \text{Eq. 150}$$

Nous allons maintenant sommairement exposer les grands principes et les critères numériques de convergence de chacune des méthodes employés.

• Méthode du gradient conjugué^[32]

Cette méthode a d'abord été développée par Fletcher *et al.*^[32] en 1964 avant d'être reprise par Polak^[86] en 1971. Dans l'Eq. 146, λ_k minimise la fonction $F(x_{k+1}) = F(x_k + \lambda_k \cdot d_k)$. Le processus itératif est basé sur les relations suivantes :

$$d_1 = -\nabla F(x_0) \quad \text{et} \quad d_k = -\nabla F(x_k) + \beta_k \cdot d_{k-1}, \quad \forall k > 1 \quad \text{Eq. 151}$$

Avec, pour Fletcher *et al.*

$$\beta_k = \frac{\nabla^T F(x_k) \cdot \nabla F(x_k)}{\nabla^T F(x_{k-1}) \cdot \nabla F(x_{k-1})} \quad \text{Eq. 152}$$

et pour Polak :

$$\beta_k = \frac{\nabla^T F(x_k) \cdot [\nabla F(x_k) - \nabla^T F(x_{k-1})]}{\nabla^T F(x_{k-1}) \cdot \nabla F(x_{k-1})} \quad \text{Eq. 153}$$

Cette dernière formulation permet d'obtenir de meilleurs résultats. Toutefois, la convergence de la méthode n'est rendue possible qu'en réinitialisant périodiquement la direction de descente. A la base, Fletcher *et al.* proposent d'affecter à d_k la valeur opposée du gradient $-\nabla F$ toutes les $N_x + 1$ itérations (où N_x est le nombre total de paramètres). D'autres critères ont ensuite été introduits par Beale^[90] et Powell^[91] mais ils ne suffisent pas pour observer la convergence rapide vers des solutions proches des valeurs attendues^[30].

Pour stopper le processus itératif et obtenir la convergence souhaitée, deux critères d'arrêt sont utilisés. Le premier concerne le calcul du gradient et le second porte sur le pas :

$$\begin{aligned} \text{Pour le gradient} \quad & \max_i \left(\frac{g_i \cdot \max(x_k(i); x_s^{-1}(i))}{\max(F(x_k); 1)} \right) < \varepsilon^{1/3} \\ \text{Pour le pas} \quad & \max_i \left(\frac{|x_{k+1}(i) - x_k(i)|}{\max(x_{k+1}(i); x_s^{-1}(i))} \right) < \varepsilon^{2/3} \end{aligned} \tag{Eq. 154}$$

où $x_s(i)$ est le $i^{\text{ème}}$ élément non nul de la matrice de descente diagonale fournie par l'utilisateur. A la fin du processus, il appartient à l'utilisateur de vérifier la réalité physique des grandeurs obtenues pour chacun des paramètres.

A présent, nous allons détailler la méthode de quasi-Newton qui est numériquement plus robuste mais dont le principe est plus complexe à mettre en œuvre.

• Méthode de quasi-Newton^[31]

Dans l'approche quasi-Newton donnée par Zhu C. *et al.*^[31], il n'est pas nécessaire de faire des hypothèses sur les matrices Hessiennes et sur la structure des fonctions « objectifs ». Le bon déroulement de la méthode ne dépend pas du calcul de la dérivée seconde. De plus, l'espace mémoire requis par cet algorithme est limité et facilement adaptable par l'utilisateur. Enfin, le nombre d'itérations est faible et indépendant des propriétés des fonctions « objectifs ». C'est la raison pour laquelle cette méthode est souvent employée pour résoudre des problèmes où la matrice Hessienne $\nabla^2 F(x)$ est difficile à calculer. Toutefois, cet algorithme ne converge pas rapidement si le nombre de paramètres est important et s'il y a interdépendance entre ces variables. En effet, il nécessite de nombreuses évaluations des fonctions « objectifs » entre chaque itération. On notera que si le problème est mal conditionné, il sera d'autant plus difficile d'obtenir des solutions précises puisque les critères de convergence seront atteints avant que toutes les variables soient finement déterminées.

L'algorithme général est basé sur une méthode de projection des gradients^[102] pour déterminer un premier jeu de paramètres lors de chaque itération. Son utilisation est justifiée par de nombreux travaux^{[99][103]} qui démontrent la fiabilité de cette méthode sur de nombreux problèmes d'optimisation.

Si on adopte la notation $g_k = \nabla F(x_k)$, l'Eq. 149 se réécrit sous la forme suivante :

$$d_k = -(\mathbf{A}_k)^{-1} \cdot g_k \tag{Eq. 155}$$

Au début de chaque itération, les valeurs du paramètre x_k , de la fonction « objectif » F_k , du gradient g_k et de la matrice positive A_k sont connues. Pour commencer, on définit une fonction quadratique telle que :

$$m_k(x) = F(x_k) + g_k^T(x - x_k) + \frac{1}{2} \cdot (x - x_k)^T \cdot A_k(x - x_k) \quad \text{Eq. 156}$$

L'algorithme tient compte des bornes inférieure et supérieure de chaque paramètre x . La nouvelle fonction $m_k(x)$ est approximativement minimisée en appliquant dans un premier temps une méthode de **projection des gradients** pour la borner. Ensuite, lors de la minimisation de $m_k(x)$, on considère ces bornes comme étant les contraintes du système. La projection du gradient dans la direction de descente est donnée par :

$$x(t) = P(x_k - t \cdot g_k, x_{\min}, x_{\max}) \quad \text{avec} \quad P(x, x_{\min}, x_{\max})_j = \begin{cases} x_{j,\min} & \text{si } x_j < x_{\min} \\ x_j & \text{si } x_j \in [x_{\min}, x_{\max}] \\ x_{j,\max} & \text{si } x_j > x_{\max} \end{cases} \quad \text{Eq. 157}$$

où j représente le $j^{\text{ème}}$ paramètre à optimiser.

On utilise la **méthode de Cauchy généralisée** pour obtenir le premier minimum local (souvent noté x^c) dans cette direction de descente. Après avoir déterminé approximativement la solution $\bar{x}_{k+1} = x^c$, on applique une méthode itérative dite de *line search* telle que $d_k = \bar{x}_{k+1} - x_k$ et vérifiant les conditions de Wolfe :

$$F(x_{k+1}) \leq F(x_k) + \alpha \cdot \lambda_k \cdot g_k^T \cdot d_k \quad \text{et} \quad |g_{k+1}^T \cdot d_k| \leq \beta \cdot |g_k^T \cdot d_k| \quad \text{Eq. 158}$$

avec $g_k = \nabla F(x_k)$ et les paramètres α et β respectivement égaux à 10^{-4} et 0,9 dans notre cas. On remarquera que la méthode classique dite de *backtracking line search* n'est pas utilisée ici car elle dégrade les performances d'un algorithme *BFGS* (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). Elle est remplacée par l'approche faite par Moré *et al.*^[98] où le point généré x_{k+1} satisfait l'Eq. 158.

Le gradient est ensuite évalué pour le point x_{k+1} , une nouvelle approximation de la matrice Hessienne (notée A_{k+1}) est calculée avant d'effectuer l'itération suivante. L'originalité de la méthode réside dans l'utilisation de couples de correction $\{s_i, y_i\}$ avec $i = k-1, \dots, k-m$ et m le nombre d'itérations mémorisées. A chaque itération, ces grandeurs sont évaluées suivant l'Eq. 159 et permettent de conserver l'information sur la courbure de la fonction.

$$s_k = x_{k+1} - x_k \quad \text{et} \quad y_k = g_{k+1} - g_k \quad \text{Eq. 159}$$

La matrice positive \mathbf{A}_k est alors obtenue à partir de la formule *BFGS*^[97] et des couples de correction $\{s_i, y_i\}$ représentés sous forme matricielle. Nous ne détaillons pas ici la détermination de cette matrice qui fait partie des méthodes classiques de calcul et qui est évoquée dans les travaux de Byrd *et al*^[97].

Pour stopper le processus d'optimisation, il est nécessaire de satisfaire les deux conditions suivantes. La première concerne l'évaluation de la fonction « objectif » pour le jeu de paramètres donné à la $(k+1)$ ^{ème} itération :

$$\frac{F_k - F_{k+1}}{\max(|F_{k+1}|, |F_k|, 1)} \leq a \cdot \varepsilon_m \quad \text{Eq. 160}$$

avec ε_m la précision de la machine (calculée automatiquement) et a le facteur d'ajustement donné par l'utilisateur. Ce test stoppe l'algorithme lorsque la variation de la fonction « objectif » devient négligeable entre chaque itération. La précision des machines utilisées nous permet de fixer à titre d'exemple :

- $a = 10^{12}$ pour obtenir un ordre de grandeur de la solution.
- $a = 10^7$ pour obtenir une moindre précision sur la solution,
- $a = 10^1$ pour obtenir une bonne détermination de la solution,

La deuxième condition est basée sur le calcul de la projection des gradients. Le vecteur gradient $\vec{g} = \{g_j\}$ représente l'évaluation du gradient de la fonction « objectif » pour chaque paramètre j . Il est projeté et doit être nul lorsqu'un minimum local est trouvé. Le test suivant arrête le processus d'optimisation lorsque la norme de \vec{g} devient négligeable :

$$\|\text{proj } \vec{g}\|_\infty \leq \text{Tol}_g \quad \text{Eq. 161}$$

La tolérance Tol_g est fixée par l'utilisateur et ne doit pas être inférieure à $\sqrt{\varepsilon_m}$ pour que l'Eq. 161 puisse être vérifiée lorsque le jeu de paramètres considéré équivaut à celui des paramètres réels recherchés.

Les travaux de Calamai *et al.*^[99] et de Conn *et al.*^[100] ont montré que l'oscillation de la solution dans le domaine de validité des paramètres n'est pas favorable à la convergence vers une solution réelle. Ces oscillations sont liées à la méthode qui est indépendante de la structure du problème étudié. Toutefois, le nombre d'opérations est limité et l'espace mémoire requis pour la minimisation est faible. C'est pour cette dernière raison que nous privilégions l'approche de quasi-Newton pour minimiser nos fonctions « objectifs ».

Après avoir exposées ces méthodes, nous détaillons à présent la définition des fonctions « objectifs » indispensables à la mise en place de notre méthode d'identification des paramètres. On notera qu'une approche de type recuit simulé^[101] a aussi fait l'objet de quelques tests préliminaires. Les temps de calcul pour obtenir une convergence se sont avérés très longs par rapport aux autres méthodes. C'est pour cette raison que cette voie n'a été davantage investiguée mais son emploi demeure envisageable dans le futur.

4.2 DEFINITIONS DES FONCTIONS « OBJECTIFS »

Notre technique d'optimisation des données polarisées résout l'ETRP (code *METROPOL*) pour générer les vecteurs de Stokes diffusés d'un milieu unidimensionnel à partir de ces propriétés radiatives (données d'entrée du code). Ce module est intégré dans un nouveau code de calcul nommé *PARADOXE* (Paramètres RADiatifs par Optimisation de données eXpérimentales d'Echantillons). Il permet de minimiser les fonctions « objectifs » en s'appuyant sur les deux modèles évoqués précédemment où les paramètres peuvent être contraints. Avant d'appliquer ces méthodes, il est nécessaire d'introduire la notion de fonctions « objectifs » et d'écrire formellement leurs équations.

En optique non polarisée, un seul jeu de données (*BRDF-BTDF*) est disponible pour définir une seule fonction « objectif ». Lorsque la polarisation de la luminance diffusée est considérée, le vecteur de Stokes peut être utilisé dans son intégralité pour définir plusieurs fonctions. Les **fonctions « objectifs »** F_j s'expriment comme étant la somme de différences finies entre un vecteur de Stokes de référence (valeurs expérimentales ou numériques) et des données simulées par résolution de l'ETRP. Dans notre cas, ces fonctions se déduisent de l'étude de sensibilité et sont définies sur des domaines angulaires différents, en fonction des paramètres considérés (cf. Tableau 5). Les méthodes d'optimisation permettent de minimiser ces fonctions pour un rayonnement incident non polarisé en incidence normale.

Pour l'épaisseur optique, la fonction « objectif » F_τ est telle que :

$$F_\tau = \frac{1}{N_\tau} \cdot \sum_{i=1}^{N_\tau} a_i \cdot \left[\frac{(Q/I)_{sim,i} - (Q/I)_{réf,i}}{(Q/I)_{réf,i}} \right]^2 \quad \text{Eq. 162}$$

où N_τ est le nombre total d'angles inclus dans l'intervalle défini par le Tableau 5 et où a_i est un facteur de pondération de la fonction « objectif ».

Pour l'albédo, on a :

$$F_\omega = \frac{1}{N_{\omega,1} + N_{\omega,2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N_{\omega,1}} a_i \cdot \left[\frac{(BRDF)_{sim,i} - (BRDF)_{réf,i}}{(BRDF)_{réf,i}} \right]^2 + \sum_{j=1}^{N_{\omega,2}} a_j \cdot \left[\frac{(BTDF)_{sim,j} - (BTDF)_{réf,j}}{(BTDF)_{réf,j}} \right]^2 \right) \quad \text{Eq. 163}$$

$N_{\omega,\gamma}$ est le nombre de points pris en compte dans les domaines angulaires définis respectivement pour la *BRDF* et la *BTDF* (cf. Tableau 5).

Pour la granulométrie, F_r est calculée à partir d'une variation du rayon moyen des particules qui intervient dans la loi de distribution en taille et est normalisée par le nombre de points ($N_{r,x}$) présents dans chacun des intervalles angulaires donnés :

$$F_{r_g} = \frac{1}{N_{r,1} + N_{r,2} + N_{r,3} + N_{r,4}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N_{r,1}} a_i \cdot \left[\frac{(\text{BRDF})_{\text{sim},i} - (\text{BRDF})_{\text{réf},i}}{(\text{BRDF})_{\text{réf},i}} \right]^2 + \sum_{j=1}^{N_{r,2}} a_j \cdot \left[\frac{(\text{BTDF})_{\text{sim},j} - (\text{BTDF})_{\text{réf},j}}{(\text{BTDF})_{\text{réf},j}^2} \right]^2 + \sum_{k=1}^{N_{r,3}} a_k \cdot \left[\frac{(\text{Q/I})_{\text{sim},k}^{\text{réfléchi}} - (\text{Q/I})_{\text{réf},k}^{\text{réfléchi}}}{(\text{Q/I})_{\text{réf},k}^{\text{réfléchi}}} \right]^2 + \sum_{l=1}^{N_{r,4}} a_l \cdot \left[\frac{(\text{Q/I})_{\text{sim},l}^{\text{transmis}} - (\text{Q/I})_{\text{réf},l}^{\text{transmis}}}{(\text{Q/I})_{\text{réf},l}^{\text{transmis}}} \right]^2 \right) \quad \text{Eq. 164}$$

Il nous a semblé utile d'appliquer deux types de fonctions afin de regarder la sensibilité de la méthode au choix d'une forme de fonction « objectif ». Deux jeux de fonctions (F_j^1 et F_j^2) sont donc définis à partir de deux expressions du facteur correctif a_j . La première expression permet de calculer une fonction « objectif » qui est pondérée en valeur absolue par le produit de l'angle quadratique pris à l'extérieur du milieu ($\mu_{\text{ext},i}$) et du poids correspondant ($\rho_{\text{ext},i}$) :

$$a_i^1 = \left| \mu_{\text{ext},i} \cdot \rho_{\text{ext},i} \right| \quad \text{Eq. 165}$$

La formulation du facteur a_i^1 permet de séparer en trois grandes parties l'espace angulaire en réflexion ou en transmission. Elles correspondent aux domaines de validité des fonctions F_j^1 et considèrent indépendamment :

- le pic avant ou de rétrodiffusion ($\mu \rightarrow \pm 1$),
- les grands angles de diffusion ($\mu \rightarrow 0$),
- les angles intermédiaires.

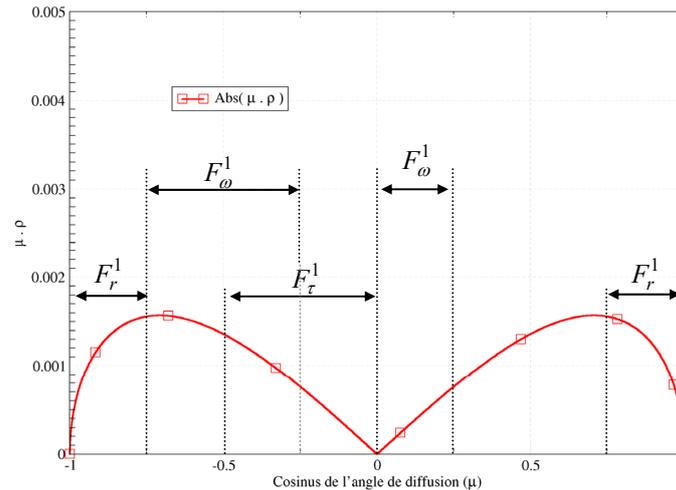


Figure 55 – Représentation du facteur correctif a_i^1 et correspondance avec les domaines de validité des F_j^1 .

Ce facteur correctif (cf. Figure 55) permet de modérer l'importance des fonctions pour les grands angles de diffusion où les valeurs expérimentales peuvent être entachées d'une erreur de mesure, le rapport signal à bruit diminuant. De plus, cette astuce numérique permet d'apporter artificiellement plus ou moins d'importance à certains domaines angulaires donc à certaines fonctions objectives qui leur sont associées. D'autre part, l'étude de sensibilité conduite dans le Chapitre précédent a montré que pour μ tendant vers 0, le paramètre Q/I était pour des faibles épaisseurs optiques, non seulement sensible à τ mais aussi à l'albédo. La pondération choisie corrige cet effet puisque pour μ tendant vers 0,5, la sensibilité à l'albédo disparaît. Toutefois, cette pondération est moins favorable pour les angles proches de la normale, alors qu'ils sont sources d'information pour la granulométrie par exemple. En revanche, on limite l'effet de l'épaisseur optique sur la $BRDF-BTDF$ qui n'est plus négligeable quand μ tend vers 1 pour de fortes épaisseurs optiques. Néanmoins, comme nous le verrons par la suite, ces pondérations relatives sont en partie corrigées par la définition de la fonction « coût » totale.

On définit également une deuxième fonction « objectif » F_j^2 qui ne tient pas compte de la correction précédente : on fixe $a_i^2 = 1$. Ce type de fonction est en général utilisé dans la plupart des travaux en identification des paramètres radiatifs (optique non polarisée).

Pour limiter les temps de calculs, nous choisissons de ne pas minimiser chacune des fonctions F_j indépendamment des autres car cela reviendrait à minimiser chaque fonction :

- soit sur le seul paramètre d'intérêt considéré, les autres étant fixés,
- soit sur les trois paramètres à la fois, et de ne retenir que la valeur du paramètre d'intérêt.

Dans ces deux cas, une boucle interne à la boucle globale d'itération serait nécessaire et coûteuse en temps de calcul. Comme cela peut être le cas en optique non polarisée, une unique fonction « objectif » globale F est donc définie comme étant la somme des trois fonctions F_τ , F_ω et F_r , respectivement pondérées par de nouveaux facteurs de correction α_τ , α_ω et α_r :

$$F = \alpha_\tau \cdot F_\tau + \alpha_\omega \cdot F_\omega + \alpha_r \cdot F_r \quad \text{Eq. 166}$$

Pour que l'optimisation soit efficace, on cherche à limiter l'influence d'un paramètre dans la réduction de la fonction « coût » totale. En effet, si une fonction est très supérieure à la somme des autres, la méthode va privilégier sa réduction. Cette situation peut alors conduire à la vérification d'un critère de convergence (par exemple, l'Eq. 160) sans modification des autres paramètres. Pour limiter cette erreur, il convient de fixer :

$$\alpha_\tau \cdot F_\tau \approx \alpha_\omega \cdot F_\omega \approx \alpha_r \cdot F_r \quad \text{Eq. 167}$$

Remarque : La première fonction « objectif » fait intervenir le produit $|\mu_{ext,i} \cdot \rho_{ext,i}|$ et impose un écart entre les coefficients de correction α_j plus important que pour F^2 afin de satisfaire cette condition. Comme nous l'avions évoqué, cette hypothèse limite néanmoins l'effet d'un couple liant pondération angulaire a_i et fonction « objectif » pour un paramètre.

Les facteurs α_j sont déterminés avant la première minimisation de la fonction globale F . Dans la pratique, on peut observer que la relation se conserve globalement dans le processus d'optimisation :

- tant que la convergence n'est pas atteinte sur au moins un des paramètres. Dans ce cas, elle se maintient pour les paramètres restants.
- dans le cas d'une réduction à peu près équivalente des fonctions objectifs de chaque paramètre.

Ces deux cas de figure représentent la quasi-totalité des convergences observées. Dans les méthodes d'optimisation (gradient conjugué ou quasi-Newton), le gradient est alors calculé par :

$$\nabla F(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \tau} \\ \frac{\partial F}{\partial \omega} \\ \frac{\partial F}{\partial r_g} \end{cases} \quad \text{Eq. 168}$$

Pour accroître l'efficacité de convergence de la méthode, il est important que la fonction F_j soit indépendante des autres paramètres, *i.e.* que la relation suivante soit vérifiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_\omega}{\partial \tau} = \frac{\partial F_r}{\partial \tau} \approx 0 \\ \frac{\partial F_\tau}{\partial \omega} = \frac{\partial F_r}{\partial \omega} \approx 0 \\ \frac{\partial F_\tau}{\partial r_g} = \frac{\partial F_\omega}{\partial r_g} \approx 0 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \nabla F(\bar{x}) \cong \left\{ \begin{array}{l} \alpha_\tau \cdot \frac{\partial F_\tau}{\partial \tau} \\ \alpha_\omega \cdot \frac{\partial F_\omega}{\partial \omega} \\ \alpha_r \cdot \frac{\partial F_r}{\partial r_g} \end{array} \right. \quad \text{Eq. 169}$$

Cette relation est vérifiée si le choix des fonctions « coût » pour chaque paramètre a bien été effectuée. Les fonctions « objectifs » étant définies, nous pouvons les utiliser dans notre démarche d'optimisation pour chacun des trois paramètres d'intérêt.

5 VALIDATION NUMERIQUE DE LA METHODE D'IDENTIFICATION DES PARAMETRES

L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer la convergence de la méthode d'optimisation qui correspond le mieux à nos attentes, de déterminer les erreurs qu'elle engendre sur la détermination des paramètres et *in fine* de valider le principe de l'identification des paramètres utilisant des données polarisées. Les trois variables étudiées (τ , ω et r_g) sont contraintes et définies positives. L'albédo est également limité à une valeur maximale égale à 1. En pratique, pour améliorer la convergence vers des solutions physiques, nous limitons également l'épaisseur optique ($\tau_{\max} = 12$).

Dans un premier temps, nous ne considérons qu'un seul paramètre dans la procédure d'optimisation pour vérifier l'efficacité des fonctions « objectifs » que nous utilisons. Les deux fonctions F_j^1 et F_j^2 sont testées dans notre démarche. Les calculs d'optimisation sur chaque paramètre pris individuellement sont menés avec les fonctions F_j^1 pour se placer dans un cas volontairement défavorable où la contribution des grands angles et des très petits angles de diffusion est artificiellement limitée. Ce choix permet de vérifier l'effet ou l'apport de cette limitation. Dans un deuxième temps, nous optimisons sur l'ensemble des paramètres pour vérifier si le choix des fonctions « objectifs » et de leur domaine angulaire de validité sont indépendants du cas considéré. L'effet du choix de pondération est aussi estimé. La dernière partie est consacrée à une étude de sensibilité de l'outil numérique en fonction des valeurs des différents paramètres radiatifs et d'un bruit simulé.

5.1 OPTIMISATION SUR UN SEUL PARAMETRE

- **Optimisation sur l'albédo**

L'optimisation des données s'effectue à partir des deux techniques numériques évoquées précédemment (gradient conjugué et quasi-Newton). C'est dans ce cadre que la fonction « objectif » globale doit être minimisée. L'identification est réalisée sur un seul paramètre à partir de la première fonction « objectif » F_ω^1 . La deuxième fonction F_ω^2 fournit des résultats peu différents puisque le produit $\mu_{ext,i} \cdot \rho_{ext,i}$ est quasi-constant dans le domaine angulaire considéré.

L'épaisseur optique et la granulométrie (particules de latex, $r_g = \lambda_0$, $\sigma_g = 1,2$) sont supposées fixes. Différents cas tests sont conduits. Nous faisons varier l'épaisseur optique, la valeur initiale de l'albédo et parcourons différents domaines d'albédo théoriques. L'albédo retrouvé et l'écart à la valeur théorique sont regroupés dans le Tableau 6.

	ω réel	Valeur initiale de ω	Gradient conjugué			Quasi – Newton		
			ω retrouvé	Erreur $\Delta\omega/\omega$	$N_{it\grave{e}r} / N_{fct}$	ω retrouvé	Erreur $\Delta\omega/\omega$	$N_{it\grave{e}r} / N_{fct}$
$\tau = 0,5$	0,50	0,20	0,55	9,50 %	2 / 8	0,51	3,70 %	2 / 18
	0,80	0,50	0,80	0,14 %	3 / 13	0,79	0,30 %	8 / 40
	1,00	0,50	0,99	0,65 %	3 / 11	1,00	0,00 %	2 / 6
$\tau = 1,0$	0,50	0,20	0,49	0,12 %	4 / 17	0,47	4,50 %	14 / 72
	0,80	0,90	0,86	7,60 %	3 / 15	0,79	0,20 %	4 / 21
	1,00	0,80	1,00	0,00 %	3 / 10	1,00	0,00 %	2 / 2
$\tau = 2,0$	0,50	0,20	0,50	0,04 %	4 / 17	0,49	0,14 %	2 / 42
	0,80	0,50	0,79	0,89 %	11 / 38	0,79	0,20 %	7 / 34
	1,00	0,50	1,00	0,00 %	3 / 11	1,00	0,00 %	2 / 8

Tableau 6 – Optimisation sur l'albédo pour une épaisseur optique et une granulométrie données.

Une attention particulière est portée sur les conditions initiales introduites par l'utilisateur dans la méthode des gradients conjugués. La première valeur de l'albédo ne doit pas s'approcher de l'une des deux bornes de validité de la variable ω . Si tel est le cas, le processus d'optimisation ne converge pas vers la solution physique. Pour étudier l'albédo, il est préconisé de se placer à une valeur intermédiaire lors de l'initialisation de la méthode des gradients (par exemple, $\omega = 0,5 \forall \omega$).

La détermination de l'albédo semble d'autant plus facile que l'épaisseur optique est importante. Lorsque l'épaisseur optique augmente, ce résultat est à rapprocher :

- d'une part, de l'accroissement de la sensibilité de $C_s(\omega)$ pour l'élément $\mu \cdot I$ (cf. Figure 47),
- d'autre part, de la baisse du coefficient de sensibilité $C_s(\tau)$ pour l'élément $\mu \cdot I$ (cf. Figure 42a-b).

De plus, pour des milieux peu absorbants *i.e.* ω proche de 1, le nombre d'itérations est faible et la convergence vers une solution réelle est plus rapide (cf. Figure 46 où $C_s(\omega)$ est d'autant plus élevé que ω tend vers 1). Pour des milieux absorbants ($\omega = 0,5$ par exemple), l'approche quasi-Newton atteint parfois ces limites. En effet, entre chaque itération, les faibles variations de la fonction « objectif » se traduisent par un gradient qui remplit rapidement les critères d'arrêt de la méthode d'optimisation (cf. Eq. 154) et ne permet pas de retrouver très finement la valeur de l'albédo. Néanmoins, l'écart à la valeur théorique demeure tout à fait acceptable.

Les temps de calcul sont semblables pour les deux méthodes utilisées. En moyenne, ils sont estimés à dix minutes pour l'optimisation d'un paramètre (processeur cadencé à 1,6 GHz). Ces temps dépendent fortement de la valeur initiale de l'albédo.

L'ensemble des résultats est satisfaisant car la convergence est toujours atteinte, les écarts relatifs demeurant très faibles. L'optimisation réussie sur le seul paramètre « albédo » nous permet de valider l'utilisation de la fonction « objectif » qui lui est associée et qui, à titre d'exemple, est représentée sur la Figure 56 pour un couple de paramètres ($\tau = 1; \omega = 0,8$).

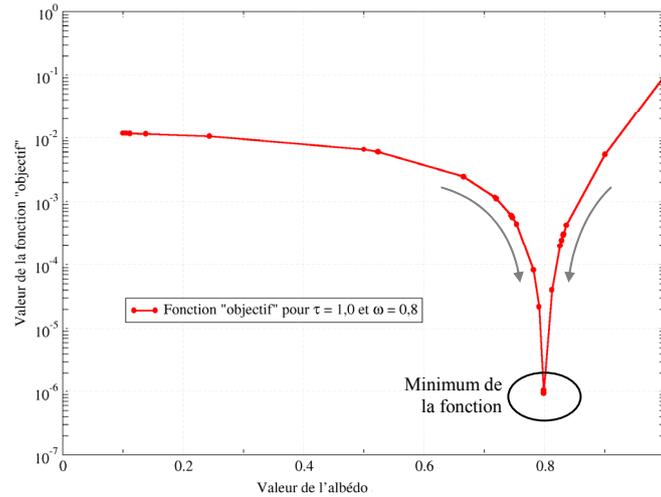


Figure 56 – Evolution de la fonction « objectif » pendant le processus d'optimisation.

- **Optimisation sur l'épaisseur optique**

Sur le même principe que précédemment, le tableau suivant de résultats est obtenu par optimisation avec l'épaisseur optique τ comme unique paramètre. Toutes les autres variables sont fixées à leurs valeurs réelles. La granulométrie du milieu est identique à celle du cas précédent.

τ réel	Valeur initiale de τ	Gradient conjugué			Quasi – Newton			
		τ retrouvé	Erreur $\Delta\tau/\tau$	$N_{it\acute{e}r} / N_{fct}$	τ retrouvé	Erreur $\Delta\tau/\tau$	$N_{it\acute{e}r} / N_{fct}$	
$\omega = 0,5$	0,50	0,20	0,51	2,12 %	5 / 20	0,49	0,18 %	10 / 11
	1,00	0,50	1,12	12,50 %	4 / 17	0,98	1,82 %	5 / 24
	2,00	1,00	1,93	3,63 %	4 / 17	1,99	0,27 %	5 / 21
	5,00	8,00	4,80	3,90 %	4 / 16	5,06	1,12 %	10 / 58
	10,0	8,00	10,43	4,27 %	4 / 16	9,87	1,24 %	9 / 28
$\omega = 0,8$	0,50	0,20	0,48	2,56 %	9 / 29	0,50	0,00 %	6 / 7
	1,00	0,50	0,93	6,24 %	7 / 27	0,99	0,03 %	6 / 7
	2,00	1,00	1,72	13,00 %	4 / 18	1,99	0,09 %	11 / 12
	5,00	8,00	4,87	2,50 %	6 / 22	5,00	0,04 %	6 / 12
	10,0	8,00	10,18	1,81 %	4 / 16	9,99	0,08 %	6 / 7
$\omega = 1,0$	0,50	0,20	0,51	3,00 %	3 / 11	0,49	0,66 %	2 / 19
	1,00	0,50	1,06	6,34 %	3 / 12	1,04	4,09 %	2 / 18
	2,00	1,00	2,27	13,89 %	7 / 33	2,00	0,00 %	5 / 8
	5,00	8,00	7,97	0,39 %	2 / 17	5,05	1,15 %	5 / 45
	10,0	8,00	11,07	10,71 %	2 / 13	10,06	0,62 %	7 / 30

Tableau 7 – Optimisation sur l'épaisseur optique pour un albédo et une granulométrie donnés.

Le tableau établit une comparaison entre les deux méthodes d'identification utilisées. L'approche par gradients conjugués ne permet pas de retrouver systématiquement les valeurs de τ : l'erreur commise est parfois importante et ne dépend pas linéairement de l'épaisseur optique. En effet, pour $\tau > 1,5$, le calcul de la fonction « objectif » F_{τ}^1 n'est pas le même que celui effectué à faibles épaisseurs optiques. En modifiant les domaines angulaires d'intérêt des paramètres de Stokes en fonction de la valeur de τ , on change également notre méthode d'identification et par conséquent l'erreur commise sur ce paramètre.

La méthode de quasi-Newton nécessite la remise à zéro régulière du vecteur de descente pour qu'il y ait convergence (par exemple, pour $N_{fct} > 15$). Dans le cas contraire, les faibles variations de la fonction « objectif » peuvent entraîner la convergence vers des minima locaux.

D'un point de vue purement calculatoire, cette dernière technique de minimisation demande des temps de calcul importants lorsque l'épaisseur optique devient grande ($\tau > 5$). En effet, le nombre d'itérations est supérieur à celui obtenu par application de la méthode des gradients conjugués. L'erreur commise sur la valeur de τ est *contrario* très faible (inférieure à quelques pour cent). Un compromis entre précision et temps de calcul associé pourra être éventuellement fait au travers du choix de la méthode retenue.

Ces résultats démontrent l'efficacité de la fonction « objectif » choisie, quelle que soit la valeur de l'albédo. En effet, l'étude de sensibilité avait montré peu d'influence de ce paramètre sur la sensibilité du paramètre Q/I à l'épaisseur optique (*cf.* Figure 45).

- **Optimisation sur le rayon des diffuseurs**

Cette dernière partie est consacrée à l'optimisation sur la taille des particules lorsque l'albédo et l'épaisseur optique sont donnés. Cette étude est réalisée pour différentes valeurs du rayon exprimé en fonction de la longueur d'onde (par exemple pour $\lambda_0 = 532$ nm).

		Gradient conjugué				Quasi - Newton		
r_g réel	Valeur initiale de r_g	r_g retrouvé	Erreur $\Delta r_g / r_g$	$N_{it\acute{e}r} / N_{fct}$	r_g retrouvé	Erreur $\Delta r_g / r_g$	$N_{it\acute{e}r} / N_{fct}$	
$\tau = 1,0$ $\omega = 0,8$	$1,2 \cdot \lambda_0$	$0,75 \cdot \lambda_0$	$1,27 \cdot \lambda_0$	5,89 %	4 / 18	$\sim 1,2 \cdot \lambda_0$	0,10 %	7 / 30
	λ_0	$0,75 \cdot \lambda_0$	$0,96 \cdot \lambda_0$	4,40 %	5 / 23	λ_0	0,00 %	4 / 7
	$0,8 \cdot \lambda_0$	$0,75 \cdot \lambda_0$	$0,79 \cdot \lambda_0$	1,50 %	4 / 18	$0,8 \cdot \lambda_0$	0,00 %	1 / 7
$\tau = 2,0$ $\omega = 0,8$	$1,2 \cdot \lambda_0$	$1,3 \cdot \lambda_0$	$1,21 \cdot \lambda_0$	0,60 %	7 / 27	$1,18 \cdot \lambda_0$	1,78 %	6 / 47
	λ_0	$1,3 \cdot \lambda_0$	$1,13 \cdot \lambda_0$	13,40 %	9 / 33	$1,02 \cdot \lambda_0$	1,86 %	3 / 21
	$0,8 \cdot \lambda_0$	$1,3 \cdot \lambda_0$	<i>pas de convergence</i>			$0,78 \cdot \lambda_0$	2,50 %	8 / 23

Tableau 8 – Optimisation sur la granulométrie pour un albédo et une épaisseur optique donnés.

Le résultat de l'optimisation dépend fortement des valeurs initiales fournies par l'utilisateur, en particulier pour la méthode du gradient conjugué. Si la valeur initiale est trop éloignée de la valeur théorique, une erreur résiduelle demeure. Nous pouvons aussi constater que lorsque l'épaisseur optique augmente, la convergence se dégrade et devient même impossible pour la méthode de gradient conjugué si cet effet se combine au précédent. On peut pointer là un manque d'efficacité de la fonction « coût » choisie pour les fortes épaisseurs optiques. En effet, la pondération de la fonction F_r^1 pour les angles proches de la normale ($\mu \approx \pm 1$) retire de l'information liée au rayon des diffuseurs. La méthode des gradients conjugués semble peu efficace dans ce cas d'étude. L'avantage de la méthode de quasi-Newton réside probablement dans sa meilleure efficacité à minimiser une fonction « objectif » dont le minimum global se détache peu du reste de la fonction.

- **Bilan sur l'optimisation à un paramètre**

La détermination d'un seul paramètre lorsque tous les autres sont parfaitement connus est rendue possible par minimisation d'une seule fonction « objectif » de type F_j^1 . Quelques cas tests ont également été conduits sur la fonction de type F_j^2 et donnent des résultats similaires que nous n'avons pas présentés ici afin de ne pas alourdir la validation de la démarche. Les procédures de minimisation de ces fonctions s'inspirent des travaux de Shanno *et al.*^[94] et de Zhu *et al.*^[31]. Dans l'ensemble, elles permettent de converger assez rapidement vers les solutions réelles.

L'erreur maximale sur la détermination de l'épaisseur optique tend à s'accroître lorsque cette dernière devient importante, mais elle demeure raisonnable. La taille des particules est également approchée (jusqu'à 13 % d'erreur dans les cas les moins favorables). Cette approximation est due à la définition de la fonction « objectif » utilisée. Il nous paraît nécessaire d'augmenter le domaine angulaire (*i.e.* le nombre de points quadratiques pris en compte) et de l'étendre en dehors des pics avant ou de rétrodiffusion. Cette manipulation n'est possible que si les autres paramètres (τ et ω) sont fixés puisqu'en dehors des zones de rétrodiffusion et de transmission, les domaines angulaires sont déjà utilisés pour les autres fonctions « objectifs ». Enfin, l'albédo est rapidement retrouvé avec une bonne précision ($\Delta\omega/\omega$ inférieur à quelques pour cent) avec des temps de calcul qui restent raisonnables.

La méthode des gradients conjugués minimise globalement avec succès les fonctions « objectifs » définies dans le paragraphe précédent lorsqu'elles sont prises indépendamment les unes des autres. La deuxième méthode (quasi-Newton), différente par son approche, est plus précise pour les trois paramètres d'intérêt mais semble aussi plus coûteuse en temps de calcul.

La validité des trois fonctions « coût » F_j^1 étant globalement établie, nous regardons à présent l'optimisation simultanée sur l'ensemble des paramètres.

5.2 OPTIMISATION SUR PLUSIEURS PARAMETRES

Nous avons vu dans notre étude de sensibilité que la luminance diffusée était très sensible à l'épaisseur optique. Cette remarque est surtout vérifiée si on considère l'élément Q/I . Les courbes de $BRDF-BTDF$ sont quant à elles plus sensibles à la valeur de l'albédo sur un grand domaine angulaire. La distribution en taille des particules contribue à la modification des quatre composantes du vecteur de Stokes diffusé dans des intervalles quadratiques bien déterminés que sont la zone de rétrodiffusion et le pic avant transmis. La définition des fonctions « objectifs » tient compte de ces observations que nous allons pouvoir vérifier en optimisant sur plusieurs paramètres à la fois.

- **Cas particulier : Optimisation sur l'albédo et la distribution en taille**

Sur les trois variables que nous cherchons à déterminer, l'épaisseur optique peut être obtenue indépendamment par des mesures d'extinction. Dans ce cas, les autres paramètres se déduisent des données de diffusion en supposant τ connue. Nous reviendrons plus en détail sur les techniques de mesure dans le chapitre suivant. Pour ce cas particulier d'optimisation à deux variables, la fonction « coût » est construite comme suit :

$$F^1 = \alpha_\omega \cdot F_\omega^1 + \alpha_r \cdot F_r^1 \quad \text{Eq. 170}$$

Quelle que soit la fonction « objectif » totale choisie (F^1 ou F^2), les conditions de non-dépendance décrites dans l'Eq. 171 doivent être satisfaites :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial F}{\partial \omega} &= \alpha_\omega \cdot \frac{\partial F_\omega}{\partial \omega} + \alpha_r \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \omega} & \text{avec} \quad \frac{\partial F_r}{\partial \omega} &\approx 0 \text{ sur le domaine angulaire restreint} \\ \bullet \quad \frac{\partial F}{\partial r_g} &= \alpha_\omega \cdot \frac{\partial F_\omega}{\partial r_g} + \alpha_r \cdot \frac{\partial F_r}{\partial r_g} & \text{avec} \quad \frac{\partial F_\omega}{\partial r_g} &\approx 0 \text{ sur le domaine angulaire restreint} \end{aligned} \quad \text{Eq. 171}$$

La méthode du gradient conjugué est employée dans un premier temps sur la fonction F^1 afin de retrouver simultanément l'albédo et le rayon moyen des diffuseurs pour différentes valeurs de l'épaisseur optique (cf. Tableau 9).

r_g réel	Valeur initiale de r_g	r_g retrouvé	Erreur $\Delta r_g / r_g$	ω réel	Valeur initiale de ω	ω retrouvé	Erreur $\Delta \omega / \omega$	$N_{it\acute{e}r} / N_{f\acute{e}t}$
$\tau = 1,0$	λ_0	$0,79 \cdot \lambda_0$	21,70 %	0,80	0,50	0,86	8,47 %	5 / 19

Tableau 9 – Optimisation sur l'albédo et la granulométrie par méthode des gradients conjugués.

Le rayon moyen des particules de latex est retrouvé sans beaucoup de précision par cette méthode, l'erreur commise sur sa détermination étant supérieure à 20 % .

Le Tableau 10 présente les résultats obtenus par la méthode de quasi-Newton à partir de la même fonction « objectif ». La convergence vers la solution est affinée, l'erreur maximale est obtenue pour une épaisseur optique faible. En effet, la sensibilité à ω et à r_g diminue lorsque les milieux sont optiquement peu denses (*cf.* définitions de $C_s(\omega)$ et $C_s(r_g)$).

	r_g réel	Valeur initiale de r_g	r_g retrouvé	Erreur $\Delta r_g / r_g$	ω réel	Valeur initiale de ω	ω retrouvé	Erreur $\Delta \omega / \omega$	$N_{itér} / N_{fct}$
$\tau = 1,0$	λ_0	$0,75 \cdot \lambda_0$	$1,02 \cdot \lambda_0$	2,1 %	0,80	0,90	0,86	7,96 %	3 / 16
	λ_0	$1,1 \cdot \lambda_0$	$1,02 \cdot \lambda_0$	2,1 %	0,80	0,90	0,86	7,56 %	3 / 17
$\tau = 0,5$	λ_0	$1,1 \cdot \lambda_0$	$1,05 \cdot \lambda_0$	5,24 %	0,80	0,90	0,88	10,35 %	3 / 17
	λ_0	$1,3 \cdot \lambda_0$	$1,07 \cdot \lambda_0$	7,23 %	0,80	1,00	0,84	5,11 %	3 / 80

Tableau 10 – Optimisation sur l'albédo et la granulométrie par méthode de quasi-Newton.

Par comparaison avec les simulations précédentes, on notera que l'optimisation des deux paramètres ω et r_g (à τ fixé) converge rapidement vers des valeurs proches des valeurs réelles. La Figure 57 représente l'évolution de la fonction « objectif » globale lors du processus d'optimisation. Le minimum est obtenu pour $\omega = 0,8$ et $r_g = \lambda_0$. Toutefois, l'erreur relative est plus importante que dans les cas étudiés précédemment où chaque paramètre était traité individuellement. L'optimisation d'un paramètre est donc affectée par l'indétermination des autres paramètres. Même si les résultats obtenus sont acceptables, on peut imputer les erreurs de convergence à l'utilisation de la première fonction de « coût ». La Figure 57 peut aussi expliquer la difficulté des deux méthodes à affiner les paramètres autour de la solution par la présence d'un minimum peu marqué autour de la solution.

Si le domaine angulaire n'était pas restreint (*cf.* Tableau 5), l'Eq. 171 ne serait pas vérifiée, ce qui aurait pour conséquence un mauvais conditionnement de notre système. Il est donc important de déterminer les zones d'intérêt où les fonctions « objectifs » données pour un seul paramètre sont très peu dépendantes des autres paramètres. Il sera intéressant d'observer cette évolution lorsque l'on cherchera à optimiser des données incertaines. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Pour améliorer la convergence de notre méthode, les critères numériques des modules d'optimisation peuvent être adaptés, comme par exemple la modification de ceux influant sur le calcul du vecteur de descente ou des critères d'arrêt. Néanmoins, cet affinement « numérique » doit être étudié au cas par cas. Après l'étude de ce cas particulier, nous nous intéressons maintenant à l'identification de tous les paramètres.

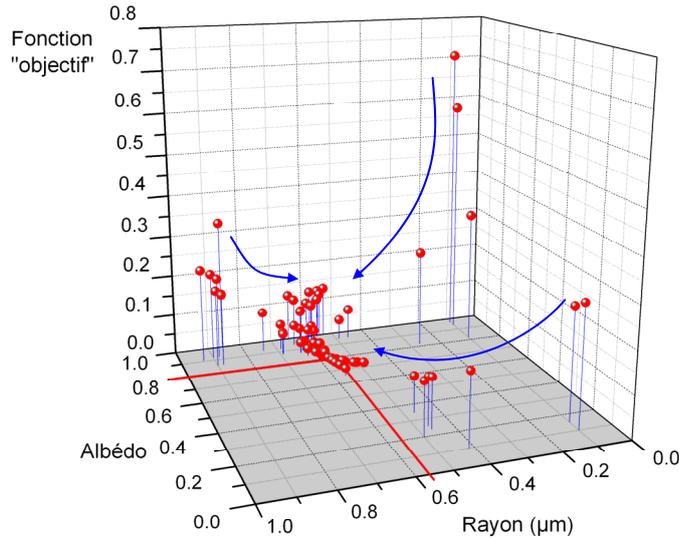


Figure 57 – Valeurs de la fonction « objectif » totale pendant le processus d'optimisation.

- **Cas général : Optimisation sur tous les paramètres**

Pour terminer cette série de tests de validation, nous minimisons simultanément les trois fonctions « objectifs » en les regroupant sous la forme d'une fonction « objectif » globale F (cf. Eq. 166) avec $F = F^1$ ou $F = F^2$. La détermination des coefficients de pondération est basée sur une comparaison des fonctions « objectifs » pour plusieurs valeurs des paramètres τ , ω et r_g de telle sorte que :

$$\alpha_{\omega} \cdot F_{\omega} \approx \alpha_{\tau} \cdot F_{\tau} \approx \alpha_r \cdot F_r \quad \text{Eq. 172}$$

La fonction « objectif » globale que l'on cherche à minimiser est, dans un premier temps, identique à celle employée jusqu'à présent c'est-à-dire F^1 . En définissant cette fonction, nous avons déjà montré que pour les grands angles ($\mu \approx 0$) et pour les angles proches de la normale ($\mu \approx \pm 1$), la contribution des fonctions F_j^1 était faible (cf. Figure 55). Contrairement à F_r^1 qui est calculée sur un large domaine angulaire, les fonctions de « coût » liées à l'albédo et à la granulométrie sont essentiellement définies pour $\mu \approx 0$ et $\mu \approx \pm 1$ (cf. Tableau 5). Les coefficients de pondération α_{ω} et α_r sont donc supérieurs à α_{τ} . Ainsi, après calculs, on fixe pour F^1 :

$$\alpha_{\omega} = 20, \quad \alpha_{\tau} = 1, \quad \alpha_r = 20 \quad \text{Eq. 173}$$

Les deux méthodes d'identification (gradient conjugué et quasi-Newton) sont appliquées au même cas d'étude. Le Tableau 11 regroupe les résultats issus de cette simulation.

	Gradient conjugué			Quasi-Newton		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur réelle	1,00	1,00	λ_0	1,00	1,00	λ_0
Valeur initiale	0,50	0,50	$0,75 \cdot \lambda_0$	0,50	0,50	$0,75 \cdot \lambda_0$
Valeur retrouvée	0,95	1,37	$1,1 \cdot \lambda_0$	0,92	1,05	$1,08 \cdot \lambda_0$
Erreur	5,00 %	37,0 %	9,96 %	7,88 %	4,86 %	8,06 %
$N_{itér} / N_{fct}$	7 / 35			2 / 21		

Tableau 11 – Optimisation sur les trois paramètres à partir de la fonction « objectif » globale F^1 .

Les erreurs $\Delta x_j / x_j$ commises sur les trois paramètres sont du même ordre de grandeur que celles obtenues lors de l'optimisation sur deux paramètres par la méthode du gradient conjugué. Seule l'épaisseur optique n'est pas obtenue avec une précision suffisante : elle est supérieure aux approximations faites par d'autres méthodes. Comme l'illustre le Tableau précédent, les méthodes de types quasi-Newton permettent de retrouver tous les paramètres recherchés avec une précision quasi-identique, quel que soit l'élément à identifier. C'est la raison pour laquelle nous choisissons de continuer la validation de notre outil d'optimisation en utilisant uniquement la méthode de quasi-Newton.

De part la pondération de ses composantes, la fonction « objectif » F^1 ne permet pas de retrouver finement les valeurs de l'albédo et de la granulométrie. A ce stade de l'étude, il est donc intéressant d'introduire la deuxième fonction de « coût » qui fait abstraction d'une quelconque pondération puis de comparer les résultats obtenus (cf. Tableau 12).

Dans le calcul de F^2 , la contribution de la fonction « objectif » liée à l'épaisseur optique est plus faible que celle de l'albédo ou de la granulométrie puisque l'élément considéré (Q/I) est inférieur à la valeur de la $BRDF$ - $BTDF$. Pour F^2 , les coefficients de pondération sont donc modifiés et fixés à :

$$\alpha_\omega = 1, \quad \alpha_\tau = 5, \quad \alpha_r = 1 \quad \text{Eq. 174}$$

	Fonction « objectif » F^1			Fonction « objectif » F^2		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur réelle	0,80	1,00	λ_0	0,80	1,00	λ_0
Valeur initiale	0,90	0,90	$1,20 \cdot \lambda_0$	0,90	0,90	$1,20 \cdot \lambda_0$
Valeur retrouvée	0,85	1,00	$1,08 \cdot \lambda_0$	0,78	1,03	$0,98 \cdot \lambda_0$
Erreur	6,80 %	0,00 %	7,90 %	1,94 %	3,50 %	1,89 %
$N_{itér.} / N_{fct}$	8 / 11			4 / 18		

Tableau 12 – Optimisation sur les trois paramètres (quasi-Newton) et changement de la fonction « objectif ».

Par rapport au cas testé précédemment, les valeurs réelles et les conditions initiales sont volontairement différentes afin de tester la méthode dans des configurations différentes. Pour la fonction « objectif » globale F^1 , l'erreur commise sur la détermination des paramètres est du même ordre de grandeur que dans le cas précédent ($\approx 8\%$) sur le rayon et l'albédo. Seule l'épaisseur optique est parfaitement retrouvée dans le Tableau 12 : le calcul du point de Cauchy peut parfois aboutir à la détermination exacte du paramètre et conduire à un meilleur conditionnement du problème. On note que la bonne convergence sur τ par rapport aux autres paramètres est également liée au choix de la fonction F_τ^1 et de son facteur de pondération qui favorise ce domaine angulaire.

Au regard des résultats obtenus, la fonction F^2 semble être mieux adaptée pour identifier simultanément tous les paramètres. La bonne prise en compte de la diffusion mesurée dans les domaines angulaires restreints ($\mu \rightarrow 0$ et $\mu \rightarrow \pm 1$) semble indispensable pour retrouver correctement l'albédo et le rayon moyen des diffuseurs. Toutefois, d'une façon générale, l'utilisation des grands angles peut poser problème car les données expérimentales obtenues pour ces angles peuvent être entachées d'une erreur importante.

A ce stade de l'étude, nous pouvons comparer les luminances de référence avec celles diffusées par le milieu définis à partir des paramètres optimisés (cf. Tableau 12 et Figure 58). L'épaisseur optique étant pratiquement la même dans les trois cas ($\tau = 1$), il est normal de retrouver des niveaux comparables en $\mu \cdot I$ et en Q/I . Le comportement angulaire du taux de dépolarisation est affecté par la différence des albédos. Cette différence se traduit également par un léger décalage des courbes de $BRDF$. L'erreur commise sur la détermination du rayon (proche de 8% avec F^1) ne modifie pas significativement les pics de transmission et de rétrodiffusion de la $BRDF-BTDF$ mais contribue en partie au changement de leurs niveaux.

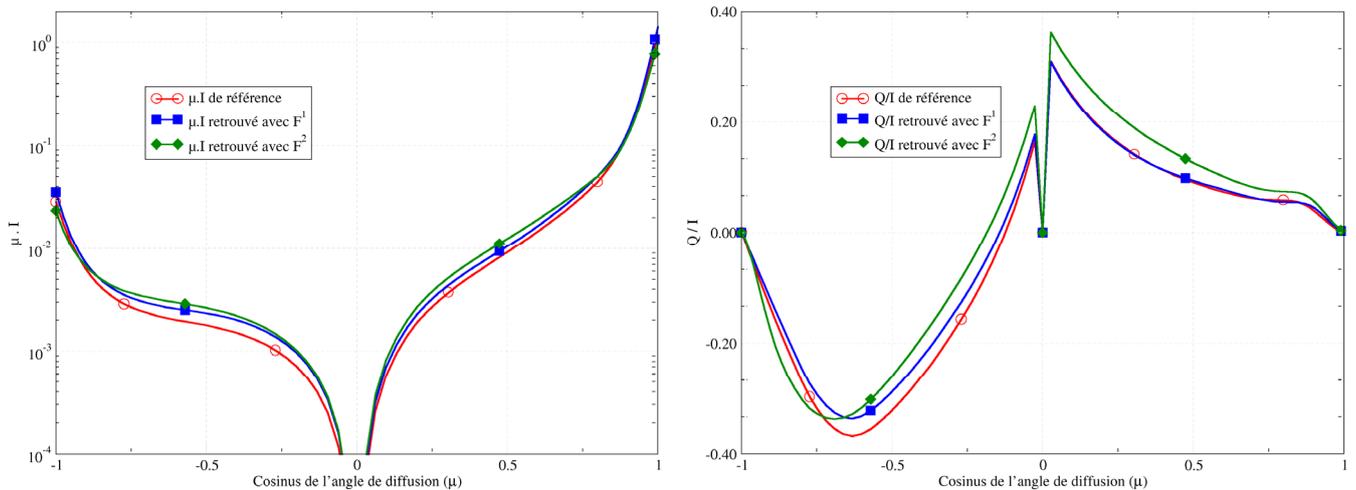


Figure 58 – Vecteurs de Stokes diffusés de référence et retrouvés après identification des paramètres sur la fonctions « objectifs » globales F^1 et F^2 .

L'erreur relative commise sur le vecteur de Stokes diffusé en fonction de μ nous permet de vérifier l'impact des nouvelles valeurs des paramètres sur tout le domaine angulaire. Ainsi, si on considère la fonction F^1 , la *BRDF-BTDF* est retrouvée avec une erreur inférieure à 35% et le deuxième élément du vecteur de Stokes est mieux déterminé. Dans ce dernier cas, l'erreur est quasi-nulle en transmission (excepté en $\mu \approx 1$). Le taux de dépolarisation (Q/I) est l'élément le plus sensible à l'épaisseur optique. Lorsque la valeur de τ est retrouvée avec exactitude par identification des paramètres, l'erreur commise sur le taux de dépolarisation est faible. Le pic correspondant à l'erreur maximale est lié à la détermination de la localisation du changement de signe de Q/I . L'épaisseur optique est moins bien déterminée lorsqu'on utilise la fonction F^2 : l'erreur sur le taux de dépolarisation augmente donc par rapport au cas précédent où l'optimisation était basée sur F^1 .

Si les coefficients de pondération de la fonction F^2 sont modifiés, la convergence du système vers des solutions réelles (méthode de quasi-Newton) est plus difficile voire impossible. Pour illustrer ces propos, le jeu de coefficients est arbitrairement fixé par :

$$\alpha_{\omega} = 20, \quad \alpha_{\tau} = 1, \quad \alpha_r = 10 \quad \text{Eq. 175}$$

Le Tableau 13 montre l'intérêt de bien choisir ces coefficients sur la fonction F^1 . On retrouve l'albédo avec une précision accrue tandis que l'épaisseur optique n'est pas retrouvée. En prenant $\alpha_{\omega} \gg \alpha_{\tau}$, la sensibilité relative à l'albédo de la fonction a augmenté. Ce jeu de coefficients permet donc de converger rapidement vers la vraie valeur de l'albédo. Toutefois, l'erreur engendrée sur τ est trop importante pour que ce jeu de coefficients soit acceptable. L'identification basée sur la fonction F^1 et les mêmes conditions initiales n'est pas présentée ici car la convergence vers une solution physique n'a pas pu être atteinte.

	ω	τ	r_g
Valeur réelle	0,80	1,00	λ_0
Valeur initiale	0,90	0,90	$1,20 \cdot \lambda_0$
Valeur retrouvée	0,81	0,20	$0,98 \cdot \lambda_0$
Erreur	0,89 %	79,71 %	2,07 %
$N_{itér} / N_{fct}$	7 / 35		

Tableau 13 – Optimisation sur les trois paramètres avec changement des coefficients de pondération.

- **Synthèse sur l'optimisation sur plusieurs paramètres**

Si l'épaisseur optique est connue, l'optimisation simultanée sur l'albédo et la granulométrie du milieu est réalisée avec la même précision que celle obtenue lors de l'identification d'un seul paramètre. Toutefois, lorsqu'on s'intéresse aux trois paramètres en même temps, la première fonction « objectif » ne permet plus de retrouver les valeurs avec cette même précision. En effet, la pondération de F^1 porte préjudice à certains domaines angulaires d'intérêt (proche de la normale notamment) et dégrade la convergence sur certains paramètres. La seconde fonction globale F^2 fournit de meilleurs résultats et est donc adoptée dans la suite de notre étude. Sur l'ensemble des résultats obtenus (non présentés ici), la précision numérique de la convergence pour cette fonction a pu être estimée à environ 5 %. Au-delà, une erreur plus importante doit être assimilée à une mauvaise convergence due à un effet perturbateur (conditions initiales incorrectes par exemple). Enfin, on notera l'importance des conditions initiales et des coefficients de pondération pour converger rapidement vers des données physiques et accroître la précision de la méthode d'optimisation.

5.3 SENSIBILITE AUX DONNEES D'ENTREE

L'optimisation des données par une méthode de quasi-Newton fournit de meilleurs résultats que la méthode des gradients conjugués : on retrouve bien les grandeurs théoriques avec des erreurs relativement faibles. Ces erreurs sont essentiellement dues à l'algorithme itératif employé et aux paramètres intrinsèques au code que l'utilisateur fournit dès le départ (conditions sur le vecteur descente ou conditions d'arrêt par exemple). Au regard du paragraphe précédent, l'identification des paramètres est désormais basée uniquement sur une méthode de type quasi-Newton avec F^2 comme fonction « objectif » globale à minimiser.

L'objectif final de ce mémoire est de présenter une méthode originale d'optimisation des paramètres radiatifs d'un milieu diffusant en optique polarisée. Par conséquent, cette étude nécessite l'introduction de données expérimentales entachées d'une certaine erreur, liée au bruit de mesure où à la méconnaissance de l'indice optique des particules par exemple. Il est donc naturel de s'intéresser à la détermination des paramètres τ , ω et r_g lorsque les valeurs de référence ne sont plus des valeurs exactes.

- **Cas particulier : Sensibilité à la valeur de l'épaisseur optique**

Considérons dans un premier temps l'identification de deux paramètres puisque l'épaisseur optique peut être obtenue indépendamment de l'albédo et de la granulométrie. D'un point de vue numérique, nous sommes beaucoup plus sensibles à sa valeur qu'à celle des autres paramètres : elle conditionne particulièrement notre système. Observons le comportement de notre méthode lorsque τ est supposée connue avec 5 % d'erreur par rapport à sa vraie valeur. Dans les conditions initiales, l'épaisseur optique est fixée à 0,95 au lieu de 1,0. Ces simulations sont basées sur l'algorithme de quasi-Newton et sont à rapprocher du Tableau 10 où les paramètres réels étaient : $\tau = 1$, $\omega = 0,8$ et $\lambda_0 = r_g$. Les résultats obtenus avec différentes valeurs de $\Delta\tau/\tau$ sont présentés dans le Tableau 14.

	$\Delta\tau/\tau = -5\%$ soit $\tau = 0,95$		$\Delta\tau/\tau = -10\%$ soit $\tau = 0,90$		$\Delta\tau/\tau = +5\%$ soit $\tau = 0,95$		$\Delta\tau/\tau = +10\%$ soit $\tau = 1,10$	
	ω	r_g	ω	r_g	ω	r_g	ω	r_g
Valeur retrouvée	0,83	$0,87 \cdot \lambda_0$	0,82	$0,96 \cdot \lambda_0$	0,79	$0,97 \cdot \lambda_0$	0,78	$0,96 \cdot \lambda_0$
Erreur	3,69 %	12,93 %	2,79 %	3,90 %	1,46 %	3,20 %	1,88 %	3,44 %

Tableau 14 – Optimisation sur ω et r_g avec une incertitude de -5, -10, +5 ou +10 % sur la valeur de τ .

La minimisation de la fonction « objectif » globale F^2 n'est pas trop sensible à une variation de τ . On retrouve des erreurs relatives semblables sur la détermination de ω et de r_g lorsque $\Delta\tau/\tau = \pm 10\%$. En effet, par définition des fonctions « objectifs », F_ω^2 et F_r^2 sont quasi-indépendantes de τ sur une large plage de valeurs de ω et de r_g . Nous avons montré sur la Figure 47 que le coefficient de sensibilité lié à l'albédo s'accroît lorsque l'épaisseur optique augmente. Ici, l'erreur sur l'albédo diminue lorsque $\tau > 1$ et elle augmente lorsque $\tau < 1$. Sur la Figure 48b, le coefficient de sensibilité $C_S(r_g)$ est maximal lorsque Q/I passe par zéro. En imposant une valeur erronée à l'épaisseur optique, on modifie la position du « zéro » sur la représentation du taux de dépolarisation. La granulométrie est donc conditionnée par la bonne détermination de l'épaisseur optique.

Le Tableau 14 montre que l'utilisateur doit porter une attention particulière aux données d'entrée. L'écart de presque 13 % sur r_g quand $\tau = 0,95$ est dû à l'introduction de conditions initiales peu favorables. En effet, l'algorithme d'optimisation peut converger vers un minimum local de la fonction objectif. Le Tableau 15 met en avant l'importance des premières valeurs introduites dans le code. On divise par deux l'approximation faite sur le rayon en modifiant simplement la valeur initiale de l'albédo.

	Anciennes conditions		Nouvelles conditions	
	ω	r_g	ω	r_g
Valeur initiale	0,90	$1,20 \cdot \lambda_0$	1,00	$1,20 \cdot \lambda_0$
Valeur retrouvée	0,83	$0,87 \cdot \lambda_0$	0,81	$0,93 \cdot \lambda_0$
Erreur	3,69 %	12,93 %	2,37 %	6,77 %

Tableau 15 – Optimisation sur ω et r_g (incertitude de -5 % sur τ et modification des conditions initiales).

L'erreur relative commise sur la détermination de ω et de r_g augmente lorsque l'épaisseur optique est fixée et qu'elle ne correspond pas à sa valeur réelle. Il est donc important de retrouver τ avec le maximum de précision possible pour améliorer l'identification des autres paramètres (ω et r_g).

- **Sensibilité globale pour les milieux optiquement denses**

La validité de la méthode d'identification est vérifiée pour différentes valeurs de l'épaisseur optique. L'objectif est de déterminer l'épaisseur optique maximale qui peut être retrouvée lorsqu'on considère des milieux denses (valeurs initiales identiques aux cas précédents). Les données de référence sont donc calculées pour différents τ , les valeurs réelles des autres paramètres recherchés sont telles que $\omega = 0,8$ et $r_g = \lambda_0$.

	$\tau = 1$			$\tau = 2$			$\tau = 5$		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur retrouvée	0,78	1,03	$0,98 \cdot \lambda_0$	0,79	2,35	$0,93 \cdot \lambda_0$	0,81	5,34	$0,93 \cdot \lambda_0$
Erreur	1,94 %	3,50 %	1,89 %	0,13 %	17,5 %	7,24 %	0,40 %	6,88 %	6,76 %
	$\tau = 8$			$\tau = 10$			$\tau = 15$		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur retrouvée	0,77	7,36	$1,03 \cdot \lambda_0$	0,79	9,84	$0,97 \cdot \lambda_0$	0,74	14,91	$0,94 \cdot \lambda_0$
Erreur	3,05 %	8,05 %	2,6 %	0,79 %	1,57 %	2,86 %	7,62 %	0,57 %	6,07 %

Tableau 16 – Identification des trois paramètres pour des milieux optiquement denses.

La méthode d'identification par quasi-Newton est stable, même pour de fortes valeurs de l'épaisseur optique. Quel que soit le paramètre recherché, l'erreur commise sur la valeur retrouvée est inférieure à 10 %. La plus grande indétermination est constatée pour $\tau = 2$ où $\Delta\tau/\tau = 17\%$. Ceci correspond au critère de changement des intervalles définis dans le Tableau 5 et qu'il faut appliquer lors de l'optimisation sur la *BRDF-BTDF*. Pour éviter cet effet, il serait intéressant de modifier le domaine angulaire « en continu » *i.e.* en fonction de la valeur de l'épaisseur optique.

• **Sensibilité globale à l'indice des particules**

Le Tableau suivant regroupe les paramètres identifiés lorsque l'indice des particules n'est pas exactement celui des diffuseurs présents dans le milieu. Pour des particules de latex, l'indice était égal à $n_{particules} = 1,58$. Ici, nous admettons une certaine erreur sur sa valeur. Ces résultats sont à rapprocher de ceux obtenus précédemment dans le Tableau 12 où les conditions de calcul étaient identiques : les valeurs réelles sont $\tau = 1$, $\omega = 0,8$ et $r_g = \lambda_0$.

	$n_{particules} = 1,55$			$n_{particules} = 1,65$		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur retrouvée	0,86	1,14	$1,00 \cdot \lambda_0$	0,64	0,54	$0,80 \cdot \lambda_0$
Erreur	7,45 %	14,39 %	0,43 %	19,55 %	53,69 %	20,09 %

Tableau 17 – Optimisation sur les trois paramètres (quasi-Newton) lorsque l'indice des particules est erroné.

L'indice des particules intervient dans le calcul de Mie et de la matrice de Mueller. La Figure 59 représente l'évolution angulaire de la matrice de Mueller pour les trois indices précédemment cités et démontre l'importance de ce paramètre dans la diffusion de Mie.

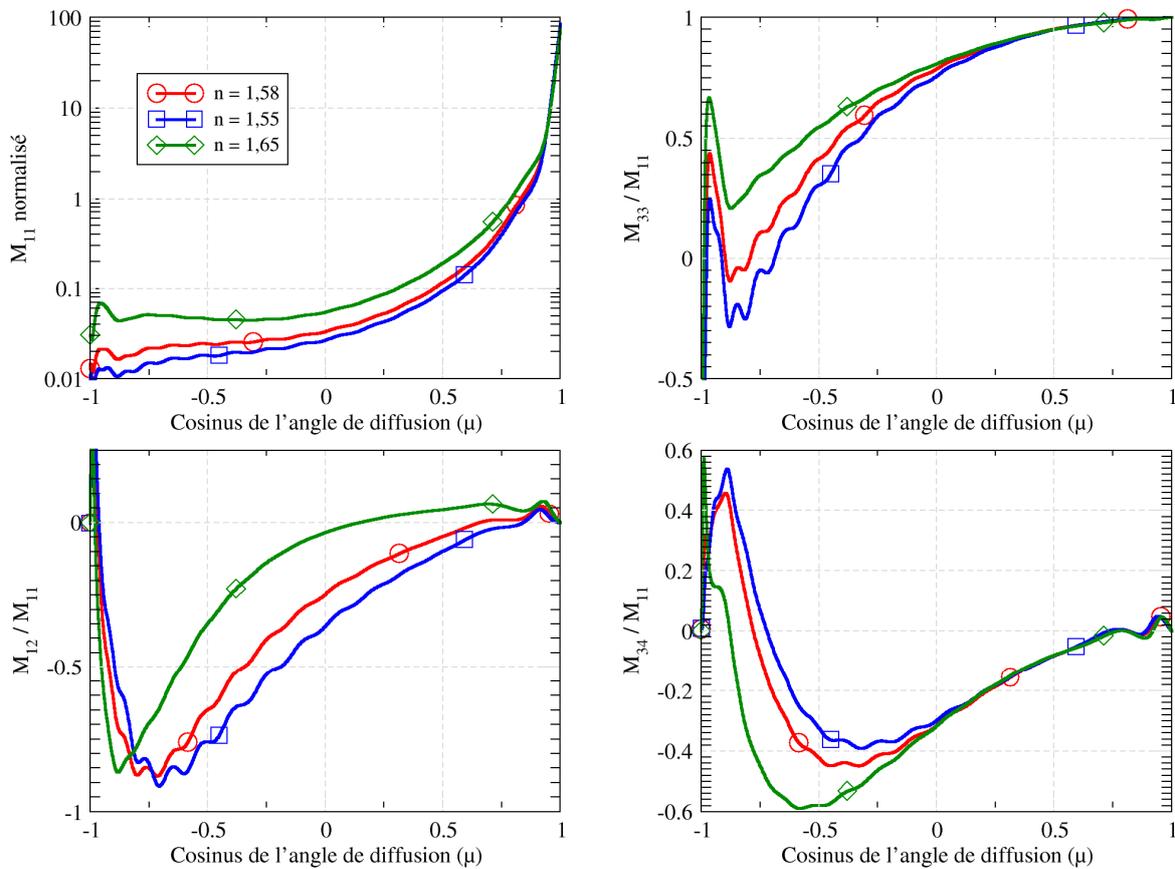


Figure 59 – Représentation de la matrice de Mueller pour les trois indices de particules.

L'impact d'une erreur sur la détermination de cette matrice est visible sur l'ensemble des variables retrouvées : l'erreur sur l'albédo et l'épaisseur optique augmente tandis que celle sur la granulométrie diminue. En effet, dans le domaine angulaire d'intérêt pour calculer F_r^2 (pic de transmission essentiellement), les fonctions de phase simulées ci-dessus sont très peu différentes. Le deuxième cas présenté dans le Tableau 17 avec $n_{particules} = 1,65$ montre que cette erreur augmente lorsque l'on s'éloigne du vrai indice des particules. Nous pouvons attribuer ces modifications de convergence aux conditions initiales introduites dans notre processus mais il est indéniable que l'indice joue un rôle prépondérant dans la démarche. L'erreur sur sa détermination est compensée par un changement des niveaux de la luminance retrouvée qui sont proportionnels à τ et ω . Lorsque l'indice augmente, le point « zéro » du rapport Q/I se déplace vers les petits angles ($\mu \rightarrow -1$). A l'inverse, le déplacement de ce point vers les grands angles est obtenu par diminution de τ . Le processus d'identification retrouve donc une épaisseur optique plus faible lorsque l'indice des particules est supérieur à la valeur réelle.

L'identification des paramètres ne pourra pas être menée à bien si l'incertitude sur $n_{particules}$ est trop importante. La Figure suivante montre la $BRDF-BTDF$ et le rapport Q/I reconstitués à partir des paramètres retrouvés. On remarquera que, par exemple, les écarts sur la $BRDF-BTDF$ et sur Q/I expliquent l'erreur importante retrouvée sur l'albédo et l'épaisseur optique.

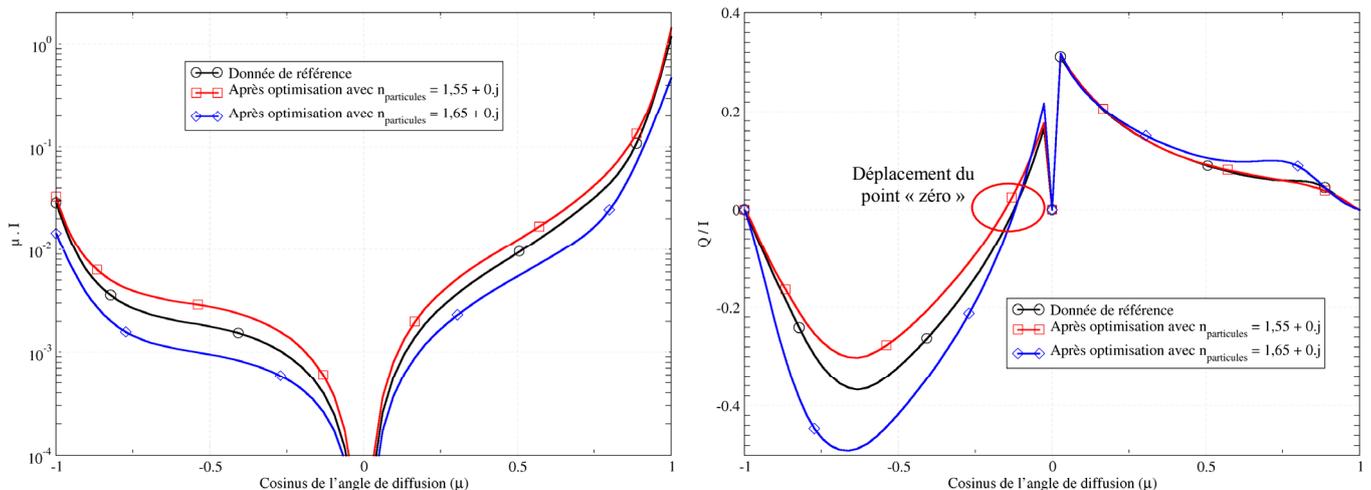


Figure 60 – Représentations du vecteur de Stokes après optimisation et modification de l'indice des particules.

- **Sensibilité globale à la loi de distribution en taille des particules (modification de σ_g)**

La distribution en taille des particules est régie par une loi log-normale où interviennent les variables r_g et σ_g .

Pour tester l'influence de σ_g , l'optimisation (avec F^2) est faite en fixant arbitrairement la largeur à mi-hauteur à deux valeurs différentes de la valeur théorique. La variation de ce paramètre ne modifie pas significativement l'indétermination faite sur la taille des particules (cf. Tableau 18). Seul l'albédo et le rayon de la granulométrie sont modifiés.

	$\sigma_g = 1,25$			$\sigma_g = 1,30$		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur retrouvée	0,78	1,02	$0,98 \cdot \lambda_0$	0,77	1,01	$0,97 \cdot \lambda_0$
Erreur	2,86 %	2,35 %	2,22 %	3,45 %	1,46 %	2,36 %

Tableau 18 – Optimisation sur les trois paramètres (quasi-Newton) avec modification de la loi de distribution en taille des particules.

Le rayon effectif et la variance effective associés à chacune des granulométries sont définis par l'Eq. 145. Si $r_g = \lambda_0$, on a :

- pour $\sigma_g = 1,20$: $r_{eff} = 1,08 \cdot \lambda_0$ et $v_{eff} = 0,033$
- pour $\sigma_g = 1,25$: $r_{eff} = 1,10 \cdot \lambda_0$ et $v_{eff} = 0,047$
- pour $\sigma_g = 1,30$: $r_{eff} = 1,14 \cdot \lambda_0$ et $v_{eff} = 0,057$

Les matrices de Mueller correspondantes sont représentées sur la Figure 61. La modification du paramètre σ_g n'affecte pas le calcul de la matrice de diffusion, même si r_{eff} et v_{eff} sont différents dans chacun des cas. La Figure 62 représente les luminances diffusées réelles et celles obtenues à partir des paramètres identifiés ci-dessus. L'écart faible entre les courbes et l'infime modification de r_{eff} ou v_{eff} nous permettent de conclure qu'une variation de σ_g n'influence pas la démarche d'optimisation que nous avons adoptée. La granulométrie retrouvée est une « granulométrie sphérique équivalente » gouvernée essentiellement par le seul paramètre r_g .

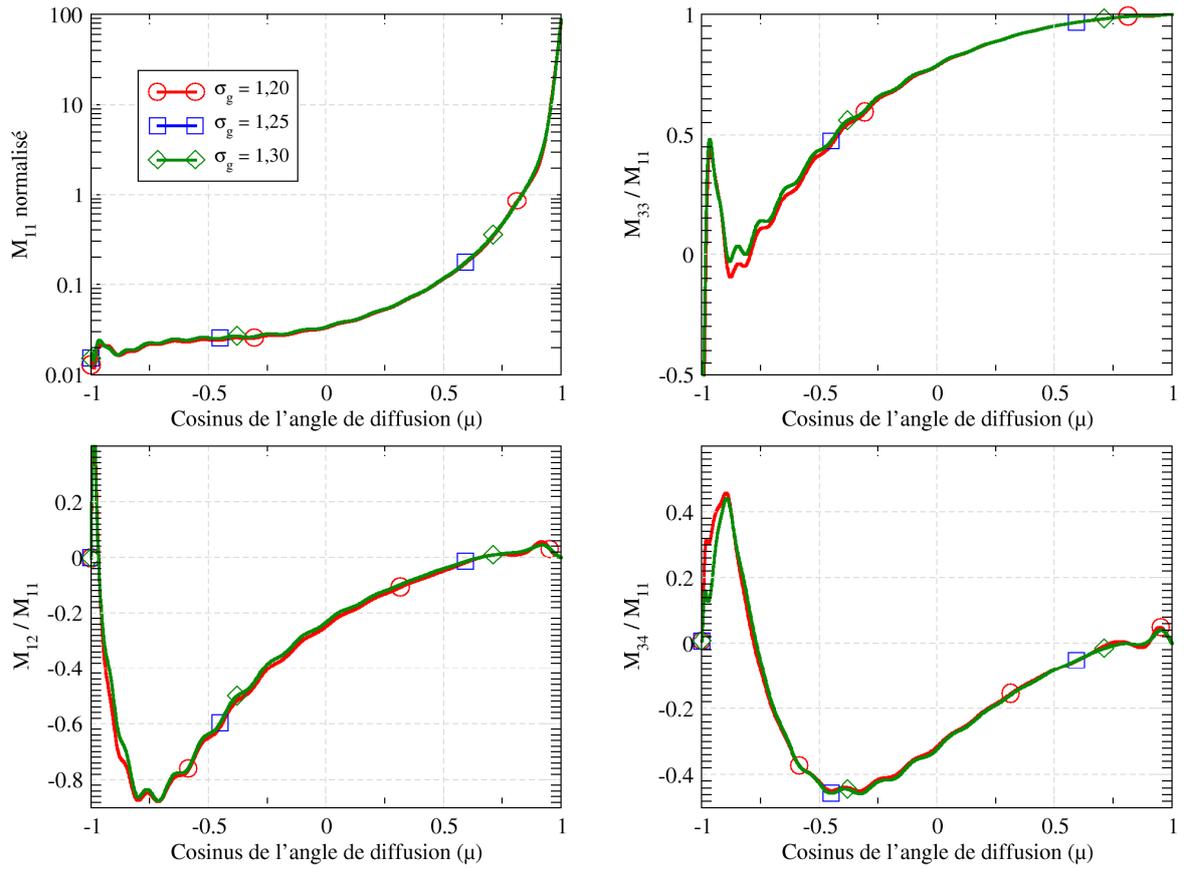


Figure 61 – Représentation de la matrice de Mueller en fonction de la valeur de σ_g .

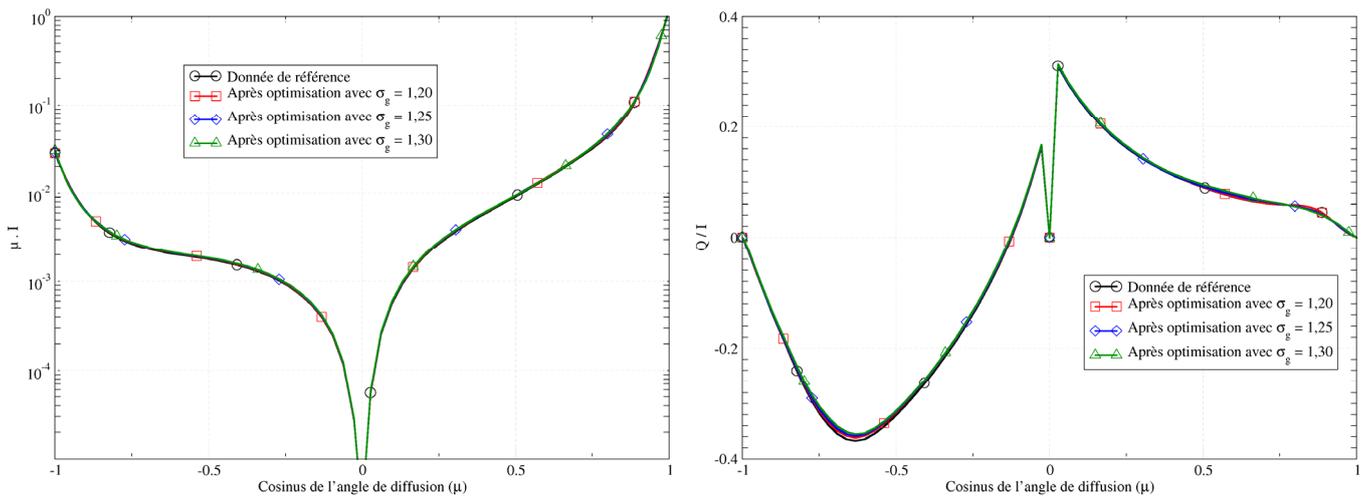


Figure 62 – Comparaison des luminances diffusées après optimisation et modification de σ_g .

- **Sensibilité globale au bruit sur les données de référence**

L'incertitude sur la mesure expérimentale du vecteur de Stokes peut générer une incertitude supplémentaire sur la détermination des paramètres radiatifs. Pour tester les limites de notre procédure d'identification des paramètres (avec F^2), nous introduisons des données de référence bruitées en ajoutant une distribution aléatoire d'erreur qui obéit à une loi de distribution normale. Trois types de bruit sont étudiés dans cette partie et sont adaptés de travaux déjà existants en optimisation de données non polarisées :

- Cas n°1 : un bruit moyen ajouté aux luminances polarisées simulées $(I, Q)^{[30][113][114]}$ (bruit additif)
- Cas n°2 : un bruit aléatoire proportionnel aux luminances polarisées simulées $(I, Q)^{[30][115]}$, il s'agit d'un bruit multiplicatif,
- Cas n°3 : un bruit aléatoire proportionnel et un *offset* systématique sur les données de référence utilisées $(\mu \cdot I, Q/I)^{[30]}$ qui correspond à la superposition des deux premiers cas.

Cas n°1

Il s'agit ici d'ajouter un niveau moyen de rayonnement diffus à la luminance polarisée calculée initialement. Cela a pour effet d'en modifier l'aspect angulaire. Ce formalisme est souvent employé pour simuler la présence de bruit thermique de détecteur dans des données expérimentales. L'écart type des calculs (*standard deviation* : SD) pour une erreur χ avec un intervalle de confiance de 95 % s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(L_j^r) = \frac{\chi \cdot \bar{L}_j^r}{1,96} \\ \sigma(L_j^t) = \frac{\chi \cdot \bar{L}_j^t}{1,96} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \bar{L}_j^r = \frac{1}{N_{gauss}} \cdot \sum_{i=1}^{N_{gauss}} L_j^r(\mu_i) \quad \text{et} \quad \bar{L}_j^t = \frac{1}{N_{gauss}} \cdot \sum_{i=1}^{N_{gauss}} L_j^t(\mu_i) \quad \text{Eq. 176}$$

où les L_j sont les quatre composantes de la luminance polarisée $\bar{L}(\mu)$ et leur contribution en réflexion ou en transmission (respectivement notées r et t). Le vecteur de Stokes bruité est modifié tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{j,SD}^r(\mu_i) = L_j^r(\mu_i) + e_{j,i} \cdot \sigma(L_j^r) \\ L_{j,SD}^t(\mu_i) = L_j^t(\mu_i) + e_{j,i} \cdot \sigma(L_j^t) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad e_{j,i} \in]0;1[\quad \text{Eq. 177}$$

Le terme $e_{j,i}$ représente un nombre aléatoire donné par une loi de distribution normale dont l'écart type est fixé à 1 et dont la moyenne est nulle :

$$e_{j,i} = p(x_{j,i}) = (2 \cdot \pi)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{x_{j,i}^2}{2}} \quad \text{Eq. 178}$$

Le paramètre $e_{j,i}$ est réinitialisé pour chaque angle quadratique (indice i) et pour chacun des éléments du vecteur de Stokes de référence (indice j).

Le bruit est généré séparément sur toutes les composantes de la luminance diffusée $(I, Q, U, V)^T$ puis, le rapport Q/I est effectué à partir des données bruitées. Une comparaison entre les données brutes et les données bruitées avec différentes valeurs de χ est faite sur la Figure 63.

C'est essentiellement l'intensité ($\mu \cdot I$) qui est impactée par la modélisation de ce type de bruit. Sur les courbes de $BRDF-BTDF$, l'incertitude augmente plus aux grands angles qu'autour de la direction collimatée. Les modifications du rapport Q/I sont essentiellement issues des variations de I et se manifestent par une évolution moins marquée angulairement en termes d'amplitude. En effet, l'écart-type sur Q est faible car il intègre dans la moyenne des valeurs négatives. On peut néanmoins noter un très léger déplacement angulaire du passage à « zéro » du paramètre Q/I .

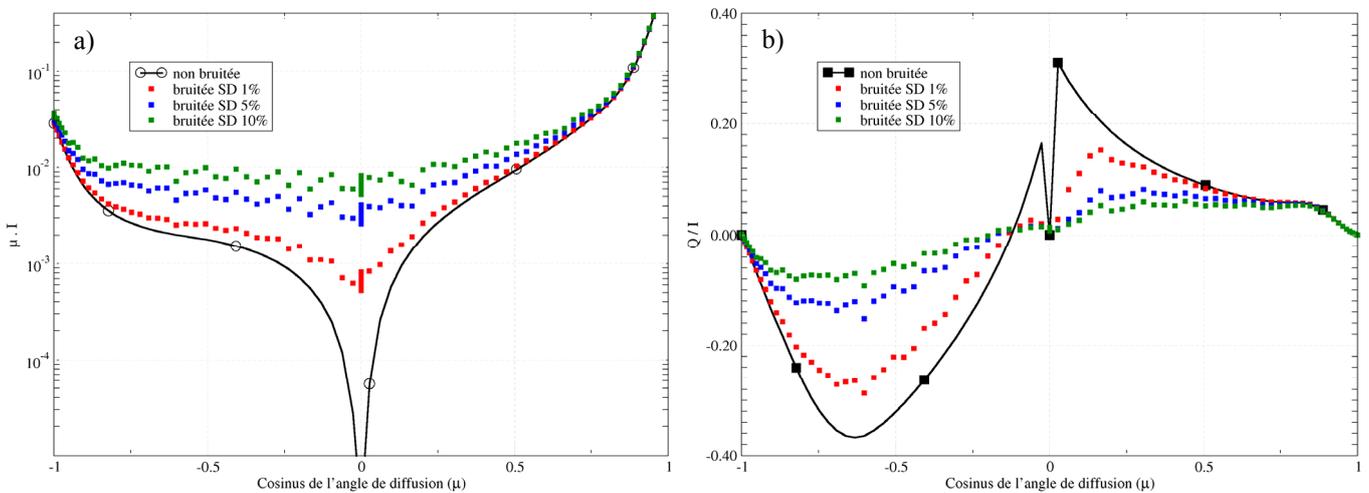


Figure 63 – Données bruitées obtenues pour le cas n°1, pour différentes erreurs χ (en %).

L'optimisation sur les paramètres est réalisée sur ces données bruitées. Les résultats sont reportés dans le Tableau 19 où les conditions initiales sont identiques à celles du Tableau 12. On rappelle que les paramètres recherchés sont : $\tau = 1$, $\omega = 0,8$ et $r_g = \lambda_0$. Pour plus de clarté, ces grandeurs ne figurent pas dans le Tableau suivant. Il est intéressant de comparer ces deux tableaux pour déterminer l'influence d'un tel bruit dans notre démarche d'optimisation.

	$\chi = 1 \%$			$\chi = 5 \%$			$\chi = 10 \%$		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur retrouvée	0,84	0,99	$0,95 \cdot \lambda_0$	0,90	1,08	$0,98 \cdot \lambda_0$	0,95	1,14	$1,01 \cdot \lambda_0$
Erreur	4,73 %	0,06 %	5,36 %	13,1 %	8,4 %	1,58 %	18,8 %	14 %	0,82 %

Tableau 19 – Identification des trois paramètres à partir de données bruitées (cas n°1).

En un nombre d'itérations assez faible ($N_{fct} < 40$), on retrouve bien les trois paramètres recherchés avec des écarts relatifs qui sont à mettre en relation avec les données bruitées introduites dans le processus d'optimisation. La détermination de l'épaisseur optique est moins perturbée par le bruit généré sur le rapport Q/I puisque l'identification de τ est sensible au passage à « zéro » du taux de dépolarisation. En revanche, l'albédo qui dépend du niveau de la $BRDF-BTDF$ sur un large domaine angulaire est plus fortement affecté par ce bruit. La méthode de quasi-Newton converge vers une solution physique avec une erreur relative importante et proche de 20 % sur ω . La précision sur la granulométrie retrouvée est inchangée car le bruit ne modifie pas les luminances pour les petits angles de diffusion ($\mu \approx \pm 1$).

La Figure 64 illustre les luminances simulées à partir des paramètres retrouvés dans le Tableau 19. Ce type de bruit introduit une hausse du niveau de la $BRDF-BTDF$ donc un albédo retrouvé supérieur à sa valeur réelle. Cette hausse de l'albédo provoque le déplacement du point « zéro » sur la Figure 64b. En effet, par analogie avec l'étude comportementale faite dans le Chapitre II en polarisation verticale, on peut raisonnablement penser qu'une augmentation de l'albédo (en non polarisé) décale ce point « zéro » vers de plus petits angles de diffusion. D'autre part, l'étude de sensibilité développée dans le deuxième chapitre montre que $C_S(\omega)$ et $C_S(\tau)$ sur Q/I sont tous deux importants autour de ce point pour les valeurs ici considérées d'albédo et d'épaisseur optique. Il existe donc une compétition entre la détermination des deux paramètres : une hausse de l'épaisseur optique tendant à ramener ce point « zéro » vers $\mu = 0$ tandis qu'une hausse de l'albédo le déplace vers les $\mu = -1$. On explique ainsi les résultats obtenus à faible épaisseur optique car il existe un couplage sur le Q/I entre ω et τ dans la zone angulaire considérée. Une solution consisterait à affiner le domaine angulaire des fonctions objectifs existantes pour des faibles épaisseurs optiques (utilisation d'autres données polarisées, passage en symétrie non azimutale).

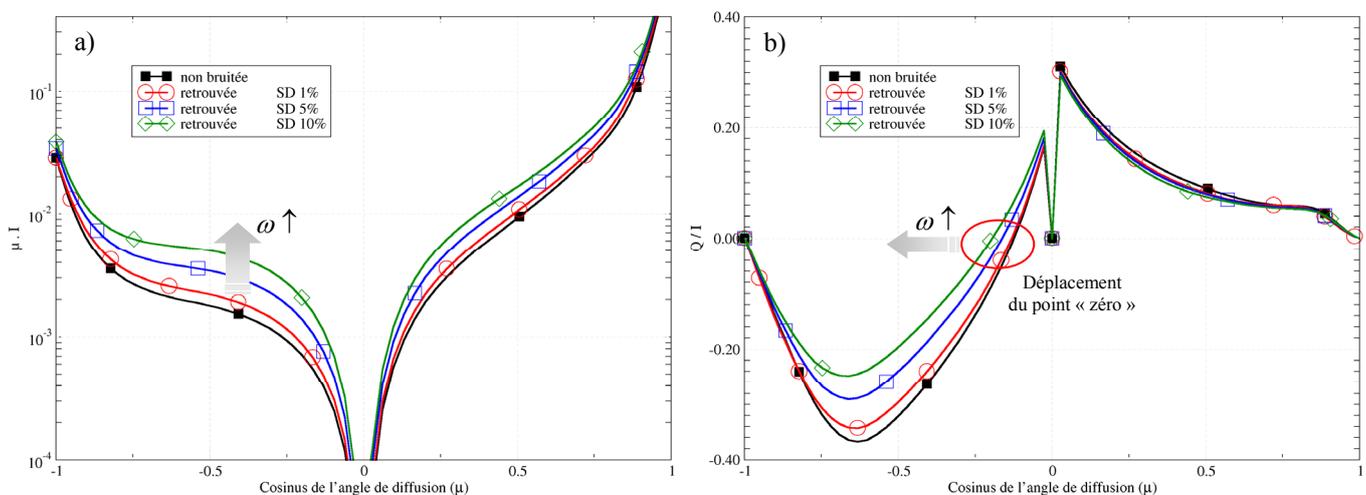


Figure 64 – Luminances reconstituées après optimisation sur des données bruitées (cas n°1).

Sur la Figure 65, les luminances réelles, bruitées ($\chi = 5\%$) et retrouvées sont comparées avec les domaines angulaires où la sensibilité est maximale pour chacun des trois paramètres. L'erreur sur le rayon moyen retrouvé est faible puisque les pics avant et de rétrodiffusion de la *BRDF-BTDF* sont bien retrouvés. Sur la courbe Q/I , le point « zéro » retrouvé correspond à celui de la courbe bruitée. De par la définition de F_τ , la valeur de cette fonction « objectif » au voisinage de ce point est plus grande que celle calculée sur les autres angles.

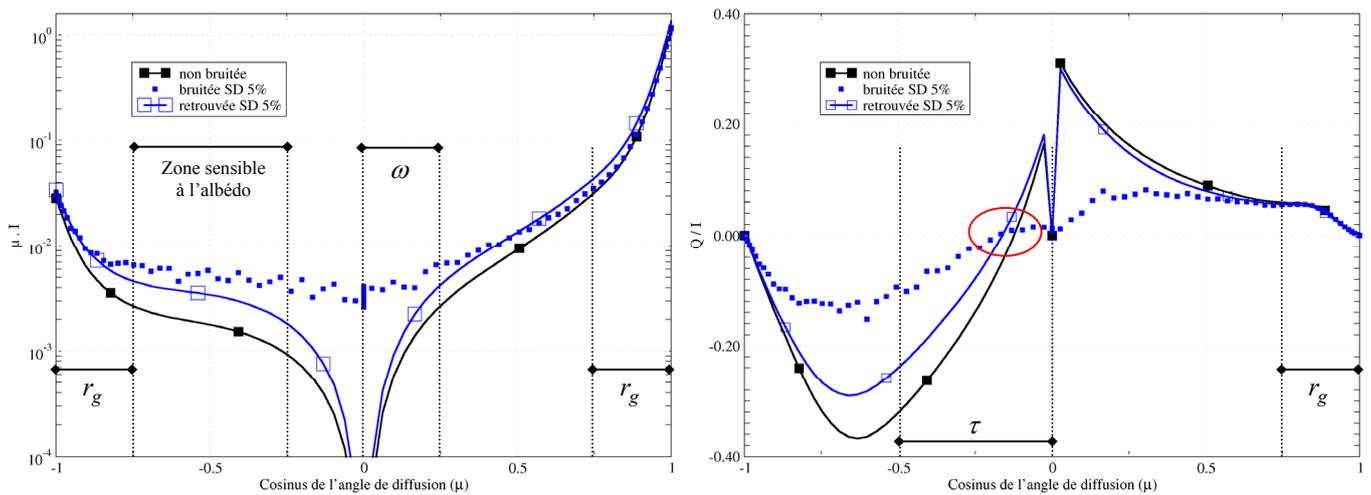


Figure 65 – Comparaison entre les luminances réelles, bruitées et retrouvées pour $\chi = 5\%$ (cas n°1).

Cas n°2

Il s'agit d'introduire un bruit aléatoire qui s'applique proportionnellement à toutes les luminances polarisées simulées. Ce type de bruit peut être assimilé à ceux observés lors de phénomènes tels que le *speckle* ou *tavelures*. La sensibilité à ce bruit croît lorsque la valeur de l'élément du vecteur de Stokes considéré est grande, comme c'est le cas de la *BRDF-BTDF* proche de la direction du collimaté par exemple. En absolu et pour les grands angles, l'influence sera beaucoup plus négligeable. L'incertitude sur des mesures expérimentales issues d'un milieu semi-transparent éclairé par un faisceau collimaté est simulée par une loi normale, corrigée par un coefficient de bruit (notation CB) :

$$\begin{cases} L_{j,CB}^r(\mu_i) = L_j^r(\mu_i) \cdot (1 + \chi \cdot s_{j,i} \cdot e_{j,i}) \\ L_{j,CB}^t(\mu_i) = L_j^t(\mu_i) \cdot (1 + \chi \cdot s_{j,i} \cdot e_{j,i}) \end{cases} \quad \text{Eq. 179}$$

avec $e_{j,i} \in]0;1[$ défini par l'Eq. 178 et $s_{j,i} = \pm 1$ choisi aléatoirement.

L'impact de ce type de bruit sur les luminances diffusées est montré sur la Figure 66. Comme précédemment, les courbes Q/I sont obtenues à partir des données bruitées des deux premières composantes (I et Q) du vecteur de Stokes. L'aspect général des courbes n'est pas changé, seuls les points de la *BRDF-BTDF* et du taux de dépolarisation sont très légèrement modifiés.

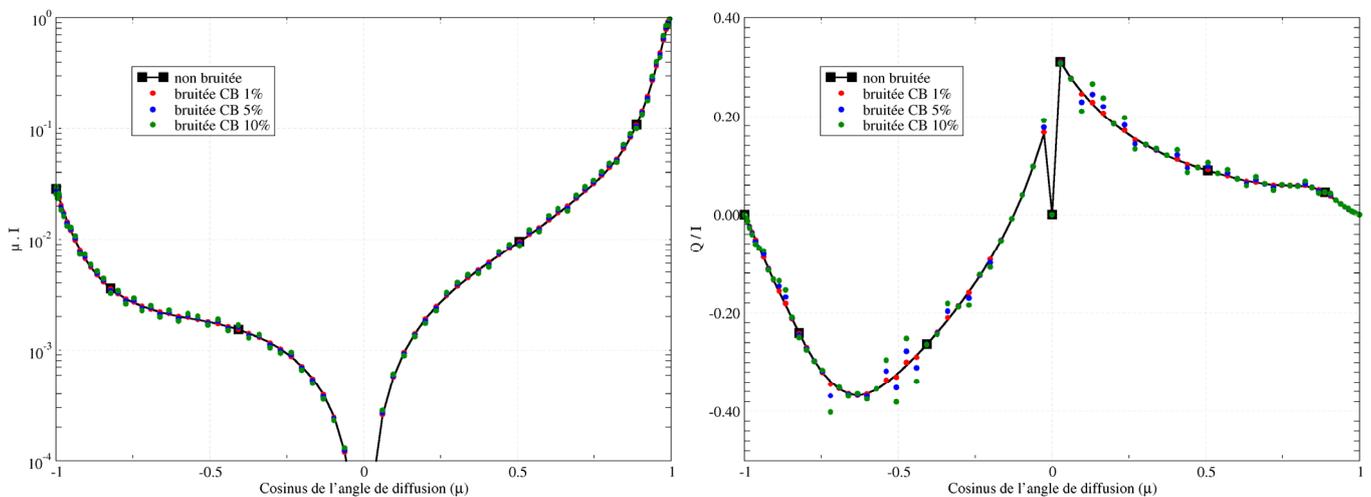


Figure 66 - Données bruitées obtenues pour le cas n°2, pour différents erreurs χ (en %).

L'identification des paramètres est effectuée avec ces luminances bruitées comme données de référence en entrée. Le Tableau 20 regroupe les résultats obtenus avec un nombre d'itérations supérieur à celui de l'optimisation sur les données de référence non bruitées ($N_{fet} > 25$) :

	$\chi = 1 \%$			$\chi = 5 \%$			$\chi = 10 \%$		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur retrouvée	0,82	0,97	$0,94 \cdot \lambda_0$	0,81	1,01	$0,93 \cdot \lambda_0$	0,81	0,97	$0,94 \cdot \lambda_0$
Erreur	1,94 %	3,31 %	6,35 %	0,95 %	0,80 %	6,55 %	1,66 %	3,23 %	6,38 %

Tableau 20 – Identification des trois paramètres à partir de données bruitées (cas n°2).

L'albédo et l'épaisseur optique sont bien déterminés puisque l'allure générale des courbes n'est pas affectée par ce type de bruit. De manière générale, les résultats retrouvés sur ces paramètres restent inférieurs à la précision numérique de la méthode qui est de l'ordre 5%. La granulométrie, très sensible à la valeur des luminances aux petits angles de diffusion ($\mu \approx \pm 1$), apparaît plus sensible au bruit avec des erreurs relatives d'environ 7%.

Les erreurs sont plus faibles que celles constatées dans le cas n°1 puisque toutes les valeurs des luminances sont simultanément modifiées autour de leur valeur réelle. En moyenne, on retrouve sur tous les points un comportement semblable entre une fonction bruitée et non-bruitée. Les vecteurs de Stokes diffusés et reconstitués à partir des paramètres identifiés dans le Tableau 20 sont représentés sur la Figure 67. L'écart entre les courbes issues des données de référence et les données retrouvées est extrêmement faible. La présence d'un léger bruit aléatoire ne modifie pas la convergence de notre méthode d'optimisation : la procédure reste stable, même si les données de référence sont bruitées par ce type de bruit.

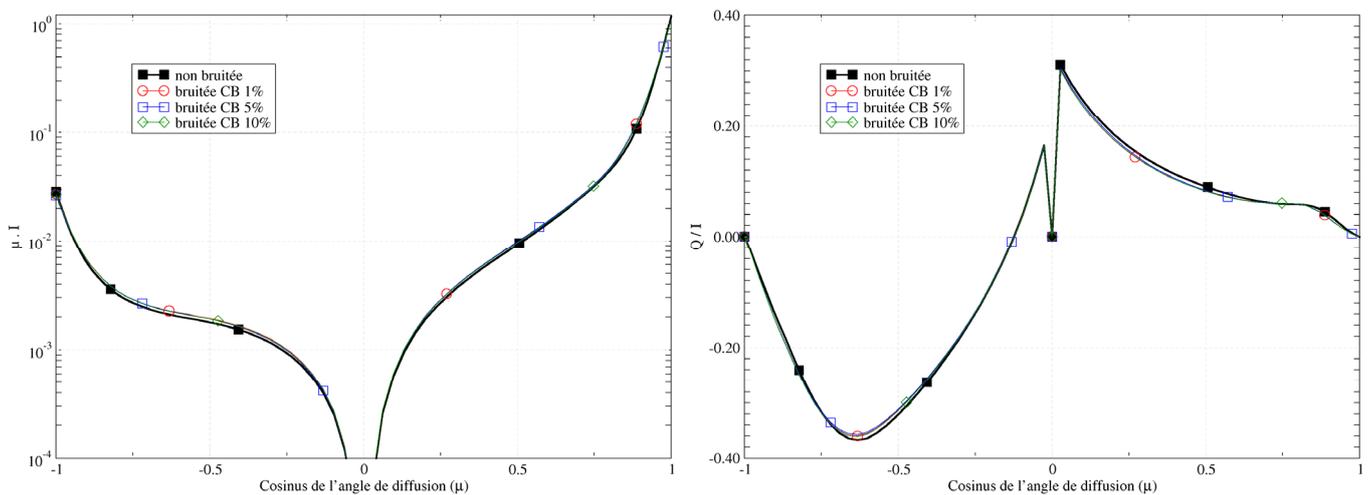


Figure 67 – Luminances reconstituées après optimisation sur des données bruitées (cas n°2).

Cas n°3

Pour terminer cette étude sur la sensibilité de la méthode d'identification aux données d'entrée, nous simulons un *offset* systématique pour chacun des éléments du vecteur de Stokes normé par rapport à I :

$$L'_j = L_j \cdot (1 + \beta) \quad \text{Eq. 180}$$

où la variable β est exprimée en pourcent et où, contrairement au cas précédent, $L_j = \mu \cdot I$ et Q/I . A ce premier terme est ajouté le bruit aléatoire déjà évoqué précédemment soit :

$$\begin{cases} L'_{j,\text{offset}}(\mu_i) = L'_j(\mu_i) \cdot (1 + \beta + \chi \cdot s_{j,i} \cdot e_{j,i}) \\ L'_{j,\text{offset}}(\mu_i) = L'_j(\mu_i) \cdot (1 + \beta + \chi \cdot s_{j,i} \cdot e_{j,i}) \end{cases} \quad \text{Eq. 181}$$

Ce type de bruit décale la *BRDF-BTDF* et modifie légèrement angulairement le rapport Q/I (rupture de pente autour du point « zéro »), auquel s'ajoute un effet aléatoire. Il peut être assimilé à une erreur systématique d'étalonnage couplée avec une incertitude de mesure. La Figure suivante représente les vecteurs de Stokes modifiés pour $\chi = 5\%$ et $\beta = \pm 5\%$, puis pour $\beta = \pm 10\%$.

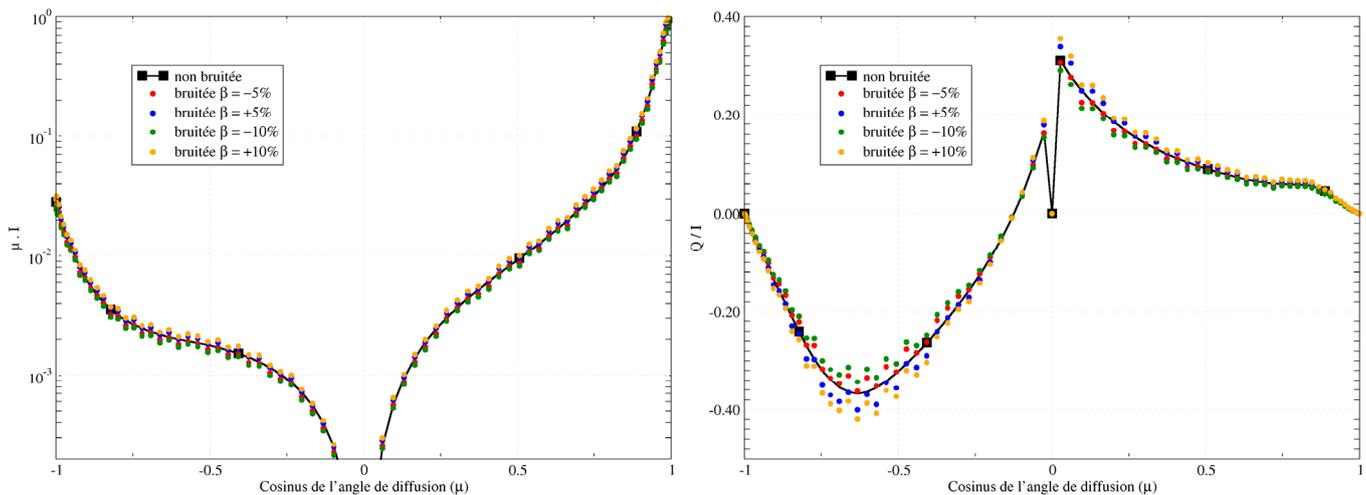


Figure 68 – Données bruitées obtenues pour le cas n°3.

Les résultats de l'identification sur ces données sont présentés dans le Tableau 21. Par rapport au cas précédent (Tableau 20 pour $\chi = 5\%$), la présence d'un *offset* systématique amplifie l'imprécision sur la détermination de la granulométrie du milieu (7% à 10% au lieu de 7%) et dans une moindre mesure dégrade la précision obtenue sur l'épaisseur optique (5% au lieu de 1%) et de l'albédo (2% au lieu de 1%). On remarque aussi qu'un *offset* positif semble plus défavorable qu'un *offset* négatif, liée probablement à l'effet de la rupture de pente sur le paramètre Q/I .

	$\beta = -5 \%$			$\beta = -10 \%$		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur retrouvée	0,81	0,97	$0,93 \cdot \lambda_0$	0,81	0,97	$0,93 \cdot \lambda_0$
Erreur	1,90 %	3,17 %	6,54 %	1,47 %	3,42 %	6,86 %

	$\beta = 5 \%$			$\beta = 10 \%$		
	ω	τ	r_g	ω	τ	r_g
Valeur retrouvée	0,81	0,95	$0,90 \cdot \lambda_0$	0,82	0,95	$0,92 \cdot \lambda_0$
Erreur	0,85 %	4,75 %	9,64 %	2,75 %	4,84 %	8,37 %

Tableau 21 – Identification des trois paramètres (cas n°3).

La Figure 69 représente les luminances retrouvées à partir des résultats du Tableau 21. Une granulométrie entachée d’une erreur significative (proche de 10%) modifie peu l’allure générale de ces courbes. Les légères différences de niveaux constatées sur le taux de polarisation transmis ou sur la BRDF sont dues à l’erreur résiduelle sur l’épaisseur optique et l’albédo du milieu diffusant.

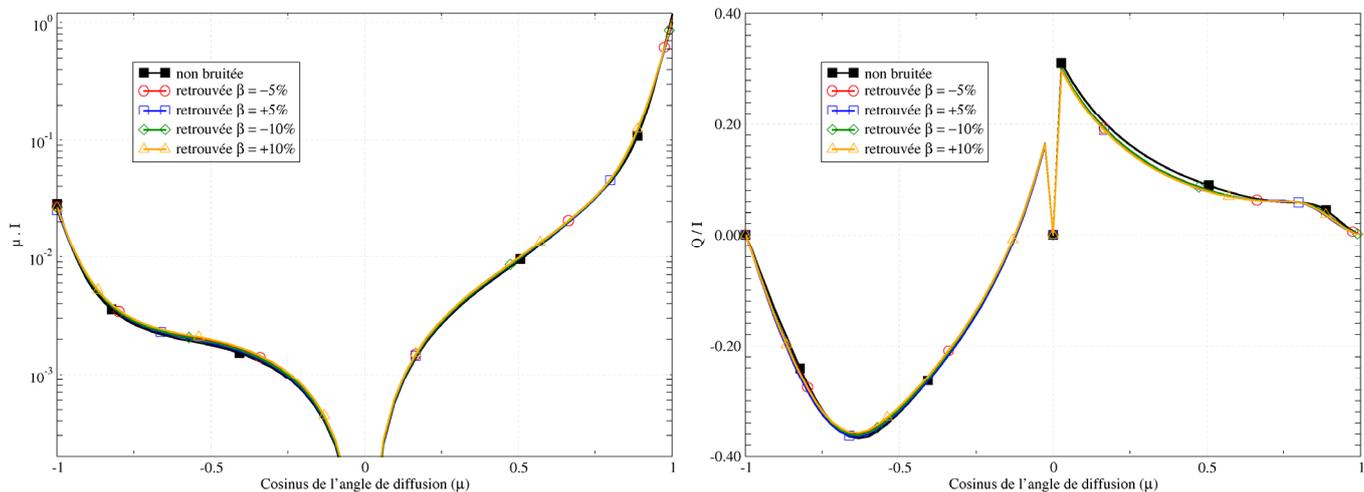


Figure 69 – Luminances retrouvées (cas n°3).

La présence d’un *offset* systématique et d’un bruit aléatoire sur les données de référence ne génère pas de grands écarts dans les valeurs retrouvées. Il en résulte un albédo et une épaisseur optique voisins des valeurs réelles. C’est la détermination du rayon moyen qui est la plus tributaire de ce type de bruit de mesure.

6 CONCLUSIONS SUR L'OPTIMISATION DE DONNEES DE REFERENCE

Ce chapitre est consacré à l'optimisation de données de référence par des outils de simulations numériques. Une bonne convergence vers des solutions physiques ne peut être vérifiée que si le nombre de paramètres mis en jeu est limité. Si les fonctions « objectifs » ne sont pas indépendantes les unes des autres, Sanchez *et al.* ont vérifié que les méthodes numériques existantes ne sont pas stables au-delà de cinq paramètres. Tout l'enjeu de notre méthode d'optimisation est donc de réduire au minimum la dimension du vecteur paramètres \vec{x} tout en conservant le maximum d'information sur le milieu diffusant.

C'est la matrice de Mueller qui caractérise parfaitement les propriétés microphysiques des diffuseurs présents dans le milieu. Différentes méthodes sont possibles pour limiter le nombre d'éléments à prendre en compte dans sa modélisation. En optique non polarisée, il est pratique de remplacer les fonctions de phase par des fonctions analytiques de polynômes (dHG par exemple). Toutefois, ces techniques numériques ne sont pas adaptées à la diffusion polarisée puisque le nombre de termes non nuls dans la matrice de phase est important : par exemple, cette matrice est composée d'au moins 6 éléments indépendants dans l'approximation de particules orientées aléatoirement. Pour les particules de grande taille, nous avons donc choisi de générer des bases de matrices et de les stocker en mémoire. Pour des diffuseurs de taille intermédiaire ($r_g \approx \lambda_0$), le calcul de la matrice de diffusion par une approche de Mie est rapide et est effectué à chaque nouvelle itération sur le paramètre de taille. Les méthodes de troncatures telles que les « delta-approximations » permettent de s'affranchir des pics avant ou de rétrodiffusion et de diminuer les temps de calcul lors du passage des fonctions de phase en série de Legendre. Ces modèles sont appliqués lorsque les fonctions sont fortement piquées.

L'écriture des fonctions « objectifs » à minimiser pour chacun des trois paramètres (τ , ω , r_g) est déduite de l'étude de sensibilité. Une fonction « objectif » globale est ensuite construite à partir de ces trois premières fonctions et tient compte de leurs variations (rapides ou non) sur le domaine de validité des paramètres. L'étude de sensibilité est également nécessaire pour déterminer les domaines angulaires où les fonctions « objectifs » sont les plus sensibles aux paramètres. La fonction F_ω est définie à partir du premier élément du vecteur de Stokes tandis que la fonction F_τ est donnée à partir du taux de dépolarisation. La dernière fonction F_r est une combinaison linéaire des deux premiers éléments du vecteur de Stokes sur des domaines angulaires différents de ceux définis pour F_τ et F_ω . Ces fonctions sont ensuite testées dans un processus itératif d'optimisation des paramètres.

Deux jeux de fonctions sont définis avec ou sans prise en compte d'une pondération angulaire. Chaque fonction « objectif » F_j^1 pondérée par le produit $a_i^1 = |\rho_i \cdot \mu_i|$ est validée individuellement, chaque paramètre étant retrouvé avec une précision suffisante. Toutefois, l'effet de cette pondération n'est plus négligeable lorsqu'on optimise simultanément les trois paramètres, bien qu'elle soit compensée par le facteur affecté à chaque fonction individuelle lors de la création de la fonction globale. Le deuxième jeu de fonctions non pondérées angulairement (en fixant $a_i^2 = 1$) s'avère alors plus efficace pour une optimisation multi-paramètre.

Nous avons développé deux procédures qui minimisent une fonction « objectif » non-linéaire $F(\vec{x})$ à partir de deux méthodes d'optimisation déjà existantes : une méthode basée sur les gradients conjugués et un algorithme de quasi-Newton. La méthode des gradients conjugués est souvent reconnue comme étant l'un des meilleurs outils pour minimiser des fonctions non-linéaires dont le domaine des valeurs prises par les paramètres est très large^[93]. Pourtant, nous avons montré ici qu'il était préférable d'adopter la méthode de quasi-Newton. Plus rapide et mieux adaptée à notre cas, cette dernière approche est utilisée pour mener à bien l'identification des paramètres radiatifs d'un milieu diffusant.

Les premières simulations valident notre démarche à partir de données de références préalablement simulées et obtenues après résolution de l'ETRP par *adding-doubling*. L'erreur commise sur la détermination des différents paramètres dépend fortement des conditions initiales introduites par l'utilisateur (*cf.* critères d'arrêt des deux algorithmes) et de la valeur des autres paramètres radiatifs pendant les itérations. A l'avenir, il serait utile d'affiner ces critères pour accélérer la convergence de l'algorithme.

L'épaisseur optique est un paramètre qui, plus que les autres paramètres, conditionne notre problème d'optimisation. S'il est possible de déterminer sa valeur expérimentalement, la précision sur l'albédo et la granulométrie est améliorée. Contrairement aux méthodes existantes en optique non polarisée, il est également possible de retrouver simultanément l'ensemble de ces paramètres en faisant intervenir le taux de dépolarisation. Lors de la construction de la matrice de Mueller équivalente, nous avons vu que la variation du rayon moyen r_g était suffisante (σ_g étant fixé). Toutefois, l'indice des diffuseurs doit être connu pour éviter la convergence de notre méthode vers des données physiques erronées.

Dans ce chapitre, l'identification des paramètres a été validée en présence de données de référence bruitées. Nous avons pu constater une certaine stabilité de la méthode à des bruits de type aléatoire ou d'*offset*. Seule une modification notable des niveaux et de la forme des données d'entrée peut conduire à une estimation dégradée des paramètres. Par comparaison avec des travaux similaires réalisés en non polarisé et à épaisseur optique connue^{[30][20][21]}, on peut constater que pour des niveaux de modification de la *BRDF-BTDF* équivalents, l'apport de la polarisation (utilisation du Q/I) limite néanmoins l'effet de ce type d'erreur sur l'albédo et la fonction de phase retrouvés.

On notera enfin que les temps de calcul CPU restent dans le domaine du raisonnable (de quelques minutes à quelques dizaines de minutes). La rapidité de l'optimisation et la bonne précision des valeurs retrouvées sont deux aspects essentiels pour l'étude de milieux diffusants plus complexes. Par exemple, il est possible d'appliquer cette démarche à des milieux poly-disperses (plusieurs granulométries caractérisées chacune par un rayon médian et une pondération relative) ou présentant une géométrie multicouche (N couples de paramètres radiatifs). Cette extension est d'ores et déjà envisageable puisque la résolution de l'ETRP par *adding-doubling* tient compte de l'éventuel changement d'indice entre deux couches adjacentes.

L'application de cette méthode originale pour déterminer les paramètres radiatifs d'un milieu est directement transposable à un cas réel où les données de référence ne sont plus simulées mais extraites de mesures expérimentales. Après cette validation numérique, l'objectif est donc de tester le concept proposé dans ce chapitre sur des données expérimentales maîtrisées. La mise en place d'un banc de mesures *in situ* pour remonter à ces données d'intérêt sur des milieux « modèles » est nécessaire. Le chapitre suivant est consacré à la présentation de ce moyen, à son étalonnage et aux premiers résultats que nous avons obtenus.

CHAPITRE IV :

MESURE DE LA DIFFUSION POLARISEE, DESCRIPTION DU MOYEN D'ETALONNAGE

1 INTRODUCTION

En général, la description d'un milieu diffusant de la lumière non polarisée est basée sur les phénomènes de diffusion simple : la granulométrie est donc la seule donnée d'intérêt accessible. Pour déterminer la distribution en taille, les méthodes actuelles, non optiques font intervenir la sédimentation homogène incrémentée par gravitation ou la méthode de la Zone Sensible Electrique (ZSE)^[116]. Les mesures optiques *in situ* s'inspirent généralement des méthodes de compteur optique^[117], de la spectroscopie^[118], de la mesure par diffraction laser^[119] ou de la mesure de diffusion simple^[120].

Cette dernière technique d'analyse est utilisée pour caractériser les milieux dilués ayant une épaisseur optique faible et dont la granulométrie peut être polydisperse (de quelques dizaines de nanomètres à plusieurs centaines de micromètres). Le principe de mesure repose sur la diffusion de la lumière par un volume V . La distribution en taille des particules est ensuite obtenue par inversion des données^{[20][21]} avec deux principales hypothèses :

- la connaissance de l'indice des particules,
- la considération de sphères équivalentes.

En réalité, l'indice des particules est parfois inconnu et leur morphologie peut être quelconque : la détermination de la granulométrie est alors soumise à une erreur indéterminée due aux approximations imposées par la méthode d'inversion. Les données polarisées contiennent à la fois des données porteuses d'information sur les différents paramètres perturbateurs et d'autres moins sensibles à ces derniers. D'autre part, si les milieux sont plus denses, la polarisation nous renseigne sur des paramètres plus macroscopiques et caractérisant toujours notre milieu. Ainsi l'épaisseur optique, l'albédo et la matrice de Mueller sont potentiellement accessibles après traitements numériques des données expérimentales.

Dans les chapitres précédents, les données polarisées utiles à la caractérisation d'un milieu optiquement dense ont été identifiées. Ces données sont accessibles expérimentalement à partir de montages optiques spécifiques. Pour mesurer l'intensité ou le taux de dépolarisation de la lumière, la notion de polarisation croisée est suffisante et fait appel à des concepts instrumentaux relativement simples sous forme de composants optiques, polariseurs et lames de retard adaptés. Pour déterminer le vecteur de Stokes dans son intégralité puis, par simple déduction, la matrice de Mueller, un moyen plus complexe doit être mis en œuvre. De nombreuses approches existent. Certaines nécessitent plusieurs modulateurs de polarisation situés avant ou après (*i.e.* en analyse) le milieu à étudier^{[22][23][24]}. Notre approche est construite sur l'utilisation d'un seul modulateur situé en entrée de la chaîne optique et une analyse idoine statique sous la forme de composants optiques^{[25][26][27]}. Le banc expérimental que nous avons développé reprend ces deux principes. Il permet également la mesure de l'extinction de la lumière par un milieu fortement chargé en particules diffusantes et/ou absorbantes. Nous pouvons ainsi comparer la mesure directe de l'épaisseur optique avec celle retrouvée *via* l'optimisation sur des données polarisées. La polarisation modulée permet de retrouver la matrice de Mueller du milieu sous certaines hypothèses et de remonter, sous certaines conditions (dont la diffusion simple), à la matrice de Mueller des particules constitutives du milieu. Notre étude étant focalisée sur l'identification de paramètres, nous ne détaillerons pas cette voie. Seul son principe de mesure sera présenté en Annexe de ce chapitre.

Dans un premier temps, la description générale du banc *MELOPEE* (Moyen Expérimental en Optique Polarisée d'Etude d'Echantillons) est présentée. Le calibrage puis l'étalonnage de ce nouveau moyen de caractérisation sont ensuite abordés. La dernière partie est consacrée à l'analyse de premiers résultats obtenus dans les différentes configurations citées préalablement pour la validation expérimentale du concept proposé.

2 DESCRIPTION GENERALE DU BANC DE MESURES

Le banc *MELOPEE* (cf. Figure 70) est un moyen de caractérisation d'échantillons en optique polarisée. La Figure 71 présente toutes les voies de mesures qui sont actuellement exploitables pour générer le vecteur de Stokes incident sur un échantillon et déterminer les luminances diffusées par ce même milieu. Les mesures angulaires sont effectuées dans le même plan φ que celui de l'éclairement incident. Le deuxième schéma (cf. Figure 72) est consacré au montage expérimental utilisé pour retrouver, par une mesure directe, la valeur de l'épaisseur optique. Par la suite, nous ferons régulièrement référence à ces deux principes de mesures tout en exprimant la luminance diffusée en fonction des éléments successivement rencontrés par le faisceau laser polarisé.

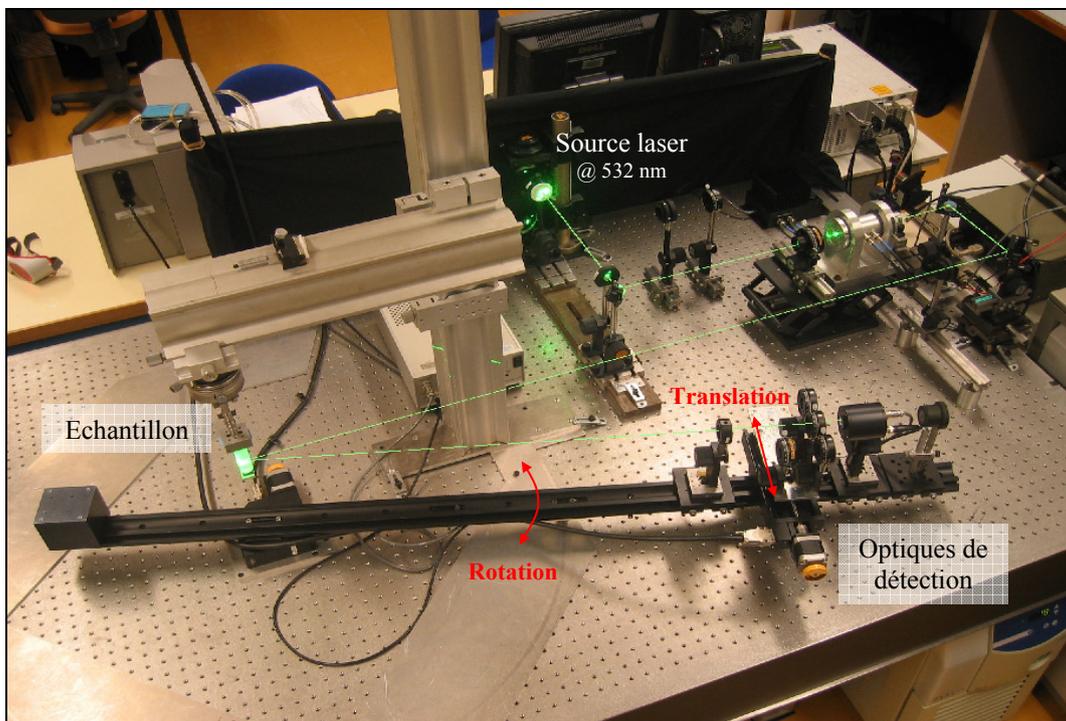


Figure 70 – Banc de caractérisation de milieux diffusants, exploitation de la voie polarisée (*MELOPEE*).

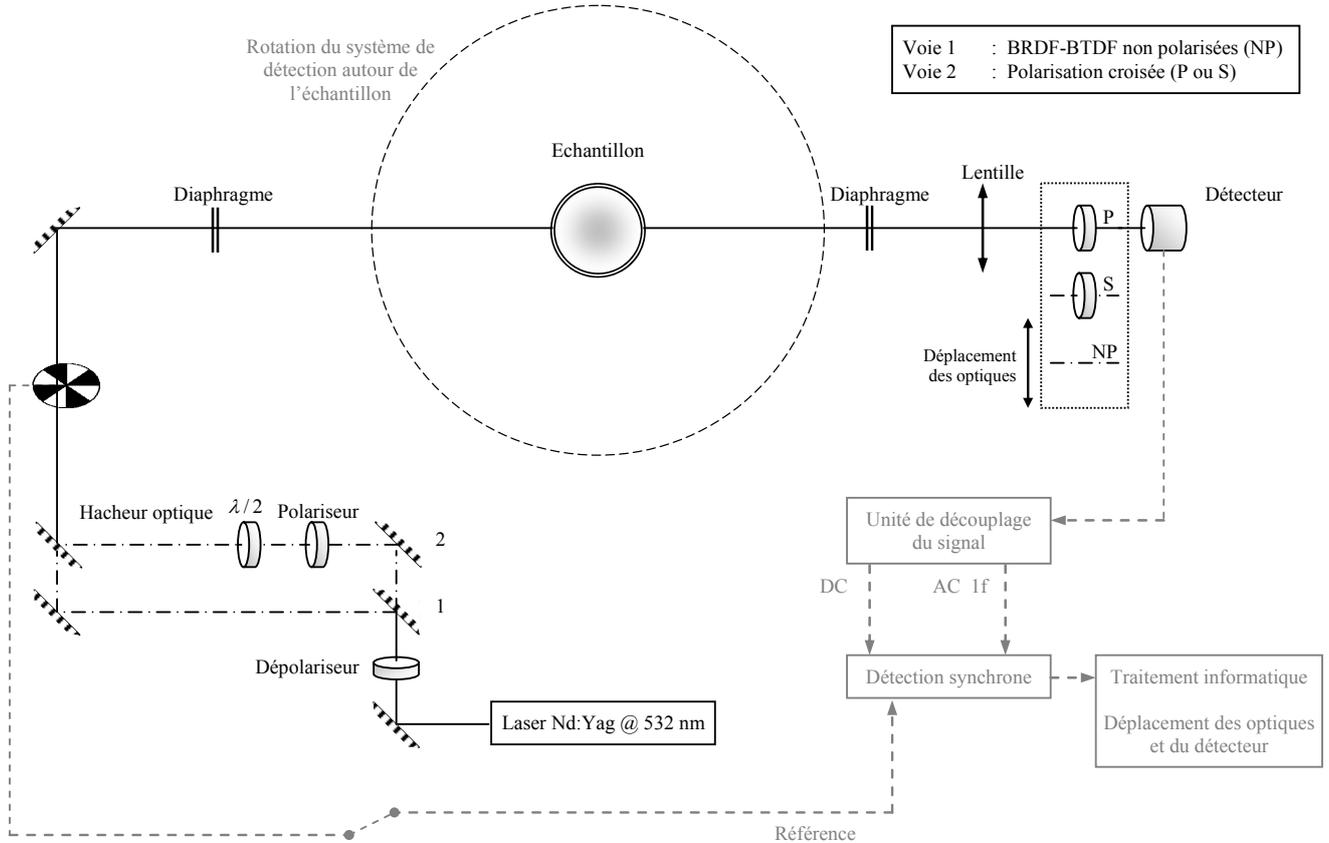


Figure 71 – Banc de mesures en optique polarisée, mesures de la diffusion angulaire (MELOPEE).

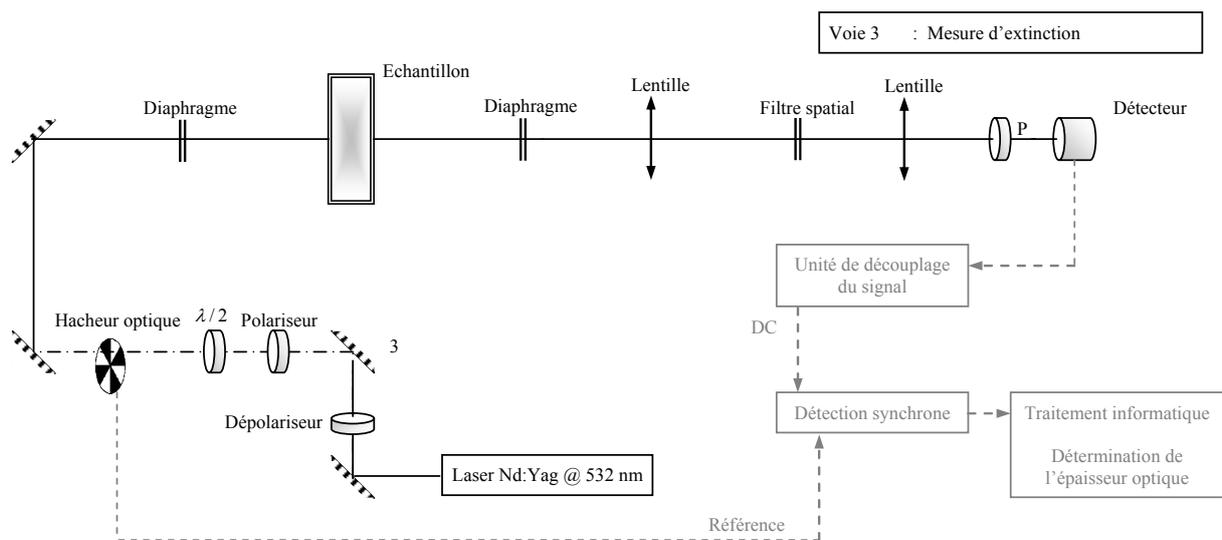


Figure 72 – Banc de mesures en optique polarisée, voie dédiée à la mesure d'extinction (MELOPEE).

2.1 GENERATION DE LA LUMINANCE INCIDENTE

Le faisceau incident est issu d'une source laser (Nd:Yag) doublée émettant dans le visible à une longueur d'onde $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$. Le choix de cette longueur d'onde est motivé par sa simplicité d'utilisation : le parcours optique est parfaitement visible et l'alignement des optiques est facilité. De plus, l'utilisation d'une longueur d'onde visible favorise d'une part l'analyse polarisée de par l'existence de nombreux composants optiques et d'autre part, l'étude de milieux de référence, les solutions aqueuses de latex n'ayant pas à ce jour d'équivalent dans l'infrarouge.

Nous cherchons à mesurer des *BRDF-BTDF* en polarisation croisée et des *BRDF-BTDF* non polarisées. Pour ce faire, le vecteur de Stokes incident sur la face d'entrée de l'échantillon doit être non polarisé ou polarisé linéairement verticalement ou horizontalement. Ce résultat est obtenu après le passage successif du faisceau laser à travers différentes optiques détaillées ci-dessous.

En sortie du laser, un **dépolariseur** de type *wedge* dépolarise complètement le faisceau incident, quel que soit l'état initial de la polarisation. Ce composant optique présente deux avantages :

- la possibilité de travailler directement avec une luminance non-polarisée (voie 1 sur la Figure 71),
- la possibilité de définir nos propres axes de polarisation (\vec{u}_P et \vec{u}_S) en plaçant un polariseur de type Glan-Thompson après le deuxième miroir de renvoi (voie 2 sur la Figure 71).

Une lame à retard de phase ou **lame demi-onde** est utilisée sur la voie 2 pour passer d'une polarisation P à une polarisation S en fonction de l'angle d'orientation de son axe optique. Réciproquement, il est possible de basculer d'un état S vers un état P par rotation inverse de ce même axe optique.

Un analyseur de polarisation est utilisé pour vérifier le bon alignement de la lame demi-onde et le bon choix des angles définissant les axes optiques \vec{u}_P et \vec{u}_S . Nous reviendrons sur cette procédure lors de l'étalonnage de la voie réservée à la polarisation croisée. Les principales caractéristiques de la source laser et une description plus détaillée des composants optiques utilisés (miroirs, polariseurs...) sont présentées en Annexe de ce chapitre.

2.2 ECHANTILLONS ET CUVES A CIRCULATION

Le diaphragme placé avant l'échantillon limite spatialement le faisceau laser : le diamètre est fixé à 6 mm. Les travaux qui sont présentés ici sont applicables à l'étude de milieux solides, liquides ou gazeux. Ce dernier cas n'est pas envisagé pour le moment car il nécessite d'adapter le banc de mesure^[121]. Les échantillons solides sont principalement constitués de peintures ou de milieux étalons (par exemple, spectralon) dont les luminances non polarisées réfléchies sont déjà connues. L'éclairage de ces échantillons se fait à la normale mais un angle d'incidence différent est envisageable. Il faut alors s'assurer que le faisceau laser incident et la détection restent

coplanaires (*i.e.* dans le même plan φ). La caractérisation des milieux liquides nécessite l'utilisation de cuves à faces parallèles ou cylindriques, avec ou sans système à circulation du fluide. Les cuves « plates » sont modélisables par des milieux semi-infinis en géométrie 1D avec les outils numériques décrits dans le Chapitre II. Un complément sur les cuves utilisées est décrit en Annexe.

L'étude de la diffusion angulaire et les mesures d'extinction nécessitent des temps de mesure qui peuvent être supérieurs aux temps de sédimentation de particules en solution aqueuse. La majeure partie des cuves (plates et cylindriques) sont donc compatibles avec un système à circulation dont l'objectif est :

- de réaliser un mélange homogène dans la cuve,
- de se placer dans l'hypothèse de particules orientées aléatoirement,
- d'augmenter les statistiques en moyennant la mesure de la diffusion sur l'ensemble du milieu étudié.

Le mélangeur utilisé (*Malvern QS-MU*) permet également de séparer les agrégats de particules par ultrasons et ainsi éviter la mesure de la diffusion de la lumière par un groupe de particules (phénomène non pris en compte dans la résolution numérique de l'ETRP 1D).

2.3 MESURE DE LA DIFFUSION DE LA LUMIERE

Pour mesurer les flux diffusés en fonction de l'angle de diffusion, le système de détection est placé au bout d'un bras en rotation autour de l'échantillon. Un détecteur en silicium est utilisé. Insensible à l'état de la polarisation, il est couplé à un jeu d'optiques (*cf.* Annexe) qui diffère suivant les composantes polarisées qui sont recherchées :

- pour la première voie non polarisée, la *BRDF-BTDF* correspond à la mesure directe de l'intensité (voie 1 sur la Figure 71),
- en polarisation croisée, deux mesures sont nécessaires avec deux polariseurs dichroïques orientés respectivement selon les axes \vec{u}_p et \vec{u}_s (voie 2 sur la Figure 71).

Le détecteur est relié à une unité de découplage du signal (UDS, type *ES-SCU90*) qui alimente le détecteur, amplifie le signal et qui sépare la composante continue de la composante alternative. Ces deux composantes sont alors amplifiées avec des gains différents. On notera que cette fonctionnalité est essentiellement utile lorsque la modulation électro-optique de la polarisation est employée (*cf.* Annexe). La détection synchrone (*PerkinElmer 7265*) est un procédé utilisé lorsque l'on souhaite extraire un signal « utile » dans du bruit. Ce principe s'applique généralement à des signaux de très faibles amplitudes (de l'ordre du μV). Dans notre cas et pour les grands angles de diffusion, cette technique permet de mesurer une tension de faible niveau noyée dans un bruit qui peut être aléatoire ou périodique. Un hacheur optique est donc placé juste après la mise en polarisation du laser pour moduler le signal incident. Il est relié à la détection synchrone.

- **Détection et bruit de mesure**

Le type de détecteur utilisé descend à des niveaux de signal très faibles lorsqu'il est associé à une électronique de détection spécifique (amplification, gain, détection synchrone). Le bruit total mesuré est la contribution du bruit de la chaîne d'acquisition électronique et du bruit de la chaîne optique. Le bruit électronique est évalué à $1,89 \mu\text{V}$ lorsque le détecteur est isolé de son environnement (occultation totale). Ainsi, la détection est limitée à ce niveau minimum de tension mesurée. Cette contribution ne dépend pas de l'angle de diffusion et reste constante quelle que soit la mesure considérée. L'échantillon est remplacé par une cuve vide à faces parallèles. Les sources secondaires parasites qui peuvent intervenir lors de la détection du signal utile sont prises en compte lorsqu'on mesure le lobe de diffusion « à vide ». La Figure 73 représente les mesures angulaires avec ou sans la présence de la source laser. Dans ces deux cas, le bruit de mesure est voisin de celui de l'électronique. Le faisceau collimaté est bien obtenu pour $\mu = 1$ et la largeur à mi-hauteur du pic corrobore bien la valeur théorique de la résolution angulaire (cf. Annexe).

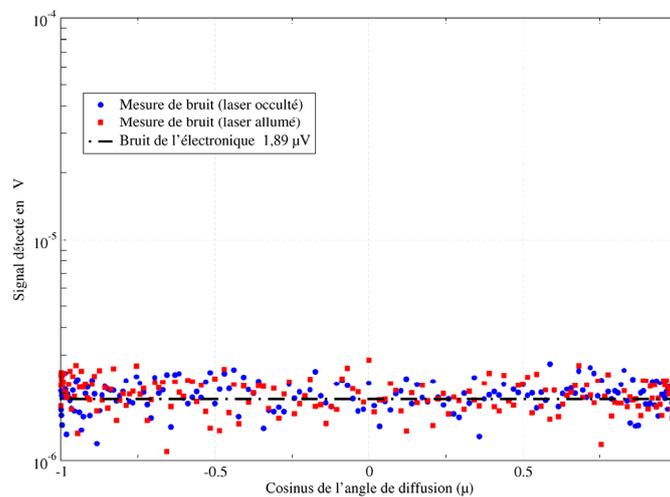


Figure 73 – Mesure de bruit (électronique et optique).

- **Acquisition de la BRDF-BTDF**

La rotation du système de détection et le déplacement des optiques devant le capteur sont assurés par deux moteurs pas-à-pas (type *Owis SM32*), pilotés *via* une interface GPIB. Le programme développé permet l'acquisition des données d'intérêt (déplacement des optiques de détection) en fonction de la voie considérée (polarisation croisée, non polarisée ou voie d'extinction). Les mesures sont effectuées dans tout le demi-domaine angulaire ($-1 < \mu < 1$) pour le plan $\varphi = \varphi_0$. La rotation du bras comprenant le système de détection est centrée sur le point définissant l'intersection du faisceau laser avec l'échantillon. Sa position est vérifiée en plaçant un miroir et en vérifiant qu'une rotation d'un angle θ sur ce miroir correspond à un maximum de signal détecté pour un angle 2θ en faisant tourner le système de détection. Un résultat illustratif est fourni en Annexe.

La valeur de la surface imagée est donnée à partir des caractéristiques du système de détection (*cf.* Annexe) et nous l'avons estimée à environ 200 mm^2 (en incidence normale). Cette valeur est vérifiée expérimentalement. Un diaphragme placé devant un spectralon est refermé jusqu'à ce que le signal détecté diminue. Ainsi, la dimension de la surface imagée est atteinte lorsque l'intensité détectée diminue. Elle est évaluée expérimentalement à 201 mm^2 (après correction du *cosinus*) pour un angle de diffusion faible ($\theta = 12^\circ$ par rapport à la normale de l'échantillon).

La description générale des composants présents sur les deux premières voies du banc a été abordée dans cette première partie. Tous ces outils doivent être calibrés puis étalonnés à partir de données de référence. Par la suite, nous détaillons le principe de mesures en comparant l'évolution formelle de la luminance incidente à des données obtenues par l'expérience.

2.4 MESURE D'EXTINCTION SUR LE BANC MELOPEE

La troisième voie du banc *MELOPEE* sert à retrouver l'épaisseur optique d'un milieu plus ou moins dense. La génération de la luminance incidente et le choix des cuves à faces parallèles sont identiques aux deux premières voies du banc. Seul le système de détection est différent : on cherche à détecter uniquement le faisceau transmis et s'affranchir des effets de diffusion.

Ainsi, le diaphragme placé après l'échantillon (*cf.* Figure 72) limite l'influence du diffus. Le filtre spatial associé aux deux lentilles convergentes filtre efficacement le diffus si le diamètre de son trou (D_{filtre} exprimé en μm) est supérieur ou égal à deux fois le diamètre de la tache de diffraction (D_{diffr} en μm) du faisceau laser. Les dimensions de cette tache sont approchées par la relation :

$$D_{\text{diffr}} \approx 2,44 \cdot \lambda_0 \cdot \frac{f}{D_{\text{laser}}} \quad \text{Eq. 182}$$

avec λ_0 (en μm) la longueur d'onde du laser, f (en mm) la focale de la première lentille et D_{laser} (en mm) le diamètre du faisceau laser. L'angle de collection du filtre (θ_{filtre}) dont l'expression est donnée par l'Eq. 183, n'est pas obligatoirement plus petit que la divergence du faisceau θ_{laser} . Pour le laser Nd:Yag utilisé, la divergence du faisceau est inférieure à 0,5 mrad.

$$\theta_{\text{filtre}} = \text{atan}\left(\frac{D_{\text{filtre}}}{f}\right) \quad \text{Eq. 183}$$

- **Dimensionnement du système de détection**

Le système est dimensionné à partir des hypothèses suivantes. La puissance totale P_T mesurée par le détecteur non polarisé s'écrit sous la forme d'une somme d'une puissance collimatée P_c et d'une puissance diffuse P_d respectivement égales à :

$$P_c / P_0 = e^{-\tau} \quad \text{et} \quad P_d / P_0 = (1 - P_c / P_0) \cdot F_d(\tau) \cdot F_p(\tau, \gamma) \cdot \frac{\Delta\Omega_{collection}}{4 \cdot \pi} \quad \text{Eq. 184}$$

avec l'angle solide de collection tel que :

$$\Delta\Omega_{collection} = \frac{\pi \cdot D_{filtre}^2}{4 \cdot f^2} \quad \text{Eq. 185}$$

Dans l'Eq. 184, $F_d(\tau)$ est une fonction qui traduit la capacité du milieu d'épaisseur optique τ à diffuser vers l'avant. En diffusion simple, elle est égale à la valeur de la fonction de phase en pointe avant. A forte épaisseur optique, elle tend vers la diffusion isotrope *i.e.* vers l'unité. Au-delà, pour de très fortes valeurs de τ , $F_d(\tau)$ tend vers zéro car la rétrodiffusion devient prépondérante. Par la suite, nous fixerons à 1 sa limite minimale.

La deuxième fonction $F_p(\tau, \gamma)$ traduit l'évolution du flux après le passage du polariseur orienté suivant un angle γ . Si le vecteur de Stokes diffusé vers l'avant est normalisé et égal à $(1, Q(\tau), U(\tau), V(\tau))^T$ alors, on montre que l'Eq. 189 permet de donner l'expression de la fonction $F_p(\tau, \gamma)$:

$$F_p(\tau, \gamma) = 1 + Q(\tau) \cdot \cos 2\gamma + U(\tau) \cdot \sin 2\gamma \quad \text{Eq. 186}$$

En diffusion simple *i.e.* pour $\tau < 0,1$ cette dernière expression tend vers l'unité, quel que soit γ car :

- $Q(\tau) = P_{12} / P_{11}$ s'écrit sous la forme du rapport des termes de la matrice de diffusion des particules et tend vers zéro pour des particules sphériques (en diffusion avant),
- $U(\tau) = 0$.

En diffusion multiple, quels que soient $Q(\tau)$ et $U(\tau)$ bornés sur $[-1;1]$ il est possible de trouver l'angle γ qui minimise la valeur de $F_p(\tau, \gamma)$. Dans la suite, nous supposons que $F_p(\tau, \gamma) = 2$ et que $F_d(\tau) = 1 + F_0 \cdot e^{-\tau}$ avec $F_0 = 100$ correspondant à la valeur moyenne du pic avant de diffusion compte tenu de la taille des particules.

En fonction des contraintes matérielles, les paramètres du système de filtrage sont calculés et donnés dans le Tableau 22.

Focale f	D_{filtre}	D_{laser}	D_{dijr}	θ_{filtre}	$\Delta\Omega_{\text{collection}}$
75 mm	60 μm	3 mm	32 μm	0,8 mrad	$5 \cdot 10^{-7} \text{ sr}^{-1}$

Tableau 22 – Caractéristiques du système de filtrage.

Le rapport P_c/P_d est une mesure de l'efficacité de la transmission du faisceau collimaté : cette efficacité est optimale tant que $\tau < 16$. Après une étude de l'erreur relative commise sur la détermination de τ , nous limitons les mesures à des milieux d'épaisseur optique inférieure à 14. Le complément sur la mesure d'extinction qui est joint en annexe détaille l'ensemble de ces calculs.

3 CALIBRAGE EN POLARISATION DE LA MESURE DE DIFFUSION

Avant d'effectuer les premières mesures de diffusion sur un milieu réel, le banc doit être calibré et étalonné sur chacune de ses voies. Le calibrage comporte plusieurs étapes indispensables telles que la vérification du bon alignement des optiques ou le comportement du système de détection en fonction de la puissance du laser et de l'état de la polarisation. Toutes ces approches sont basées sur des mesures relatives d'intensité : sauf indication contraire, la notion de radiométrie ou de mesure absolue est réservée à l'étalonnage et sera utilisée plus loin dans ce chapitre. Dans un premier temps, nous présentons chaque voie de mesure avant d'aborder son calibrage en polarisation, c'est-à-dire la vérification de l'état du vecteur de Stokes relatif après passage des optiques idoines.

3.1 CALIBRAGE DE LA PREMIERE VOIE : MESURES NON POLARISEES

La première voie est dédiée à la mesure de la $BRDF-BTDF$ non polarisée d'un milieu quelconque (liquide, solide ou gazeux). Cette voie permet de comparer les résultats de la diffusion non polarisée avec des données existantes fournies par d'autres moyens instrumentaux tels que les néphélomètres déjà présents au sein de l'ONERA^[21]. Son schéma de principe est représenté sur la Figure 74.

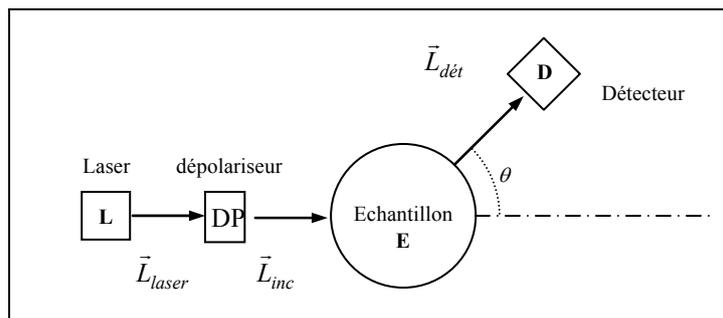


Figure 74 – Principe de mesure en non polarisé.

Le faisceau est complètement dépolarisé en sortie du laser pour s'affranchir de l'état de la polarisation intrinsèque à la source utilisée. La luminance normalisée (*i.e.* relative) correspondante s'écrit dans le formalisme de Stokes telle que $\vec{L}_{inc} = (1,0,0,0)^T$. En effet, les dépolariseurs utilisés, de type *wedge-scrambler*, possèdent une matrice de Mueller dont seul le premier terme est non nul :

$$\mathbf{M}_{dépolariseur} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 187}$$

Les miroirs (à 45°) utilisés dans ce montage ne sont pas sensibles aux fortes densités de flux et n'introduisent pas de dépolarisation supplémentaire sur les faisceaux qu'ils réfléchissent à la longueur d'onde de fonctionnement ($\lambda_0 = 532 \text{ nm}$). Ainsi, avant l'échantillon noté E sur la Figure 74, seul le premier élément du vecteur de Stokes (\vec{L}_{inc}) doit être non nul et égal à l'unité.

Expérimentalement, nous vérifions ces conditions avec un analyseur de polarisation. Cet instrument permet de tracer sur la sphère de Poincaré l'évolution de la polarisation. En plus de fournir la valeur (normalisée) du vecteur polarisation dans le formalisme de Stokes, l'analyseur renseigne l'utilisateur sur le degré de polarisation (DOP), le degré de polarisation linéaire ($DOLP$) et le degré de polarisation circulaire ($DOPL$). Ces trois grandeurs ont été définies dans le premier chapitre. La luminance incidente sur l'échantillon est mesurée avant l'échantillon et est représentée sur la Figure 75. Elle est bien complètement dépolarisée puisque les degrés de polarisation sont quasi-nuls. Pour rester en accord avec le formalisme utilisé par l'instrument, nous notons $(S_0, S_1, S_2, S_3)^T$ le vecteur de Stokes.

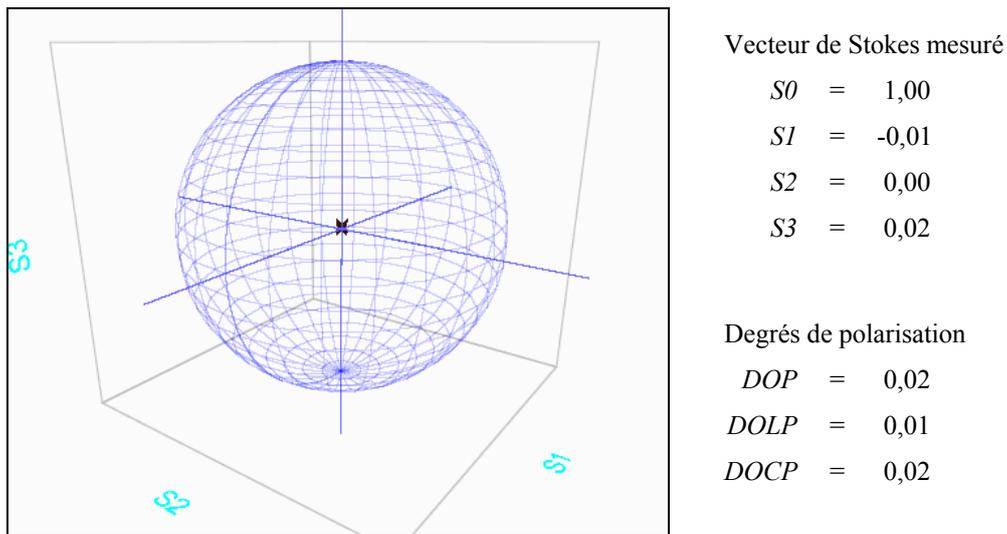


Figure 75 – Caractéristiques de la polarisation après le dépolarisateur.

Les résultats obtenus apparaissent satisfaisants. Néanmoins, nous pouvons pointer dès à présent les limites de l'utilisation d'un dépolarisateur de type *wedge-scrambler*. En effet, ces derniers ne « dépolarisent » pas vraiment la lumière mais fabriquent une lumière constituée d'une somme aléatoire de polarisations linéaires, assimilable à une lumière non polarisée.

3.2 CALIBRAGE DE LA DEUXIEME VOIE : DIFFUSION EN POLARISATION CROISEE

Le banc *MELOPEE* est un moyen expérimental dont le principal objectif est la validation des outils numériques développés précédemment. Il permet donc de générer des données polarisées de diffusion de milieux parfaitement connus (par exemple pour des particules de latex en suspension dans de l'eau). Dans un premier temps, c'est dans ce cadre que se situe notre étude en polarisation croisée. Nous pourrons ensuite analyser des milieux quelconques dont les propriétés microscopiques et macroscopiques sont inconnues. La polarisation croisée est utilisée pour déterminer le taux de dépolarisation d'un milieu diffusant : la polarisation incidente étant fixée (non polarisée, rectiligne horizontale ou verticale), on projette la lumière diffusée sur les deux axes de polarisation (\vec{u}_p et \vec{u}_s). Cette voie de mesure est décrite dans un premier temps puis, le calibrage de la polarisation est présenté.

Le principe de mesure en polarisation croisée et les optiques nécessaires sont présentés sur la Figure 76. Dans ce paragraphe, l'écriture formelle du vecteur de Stokes est comparée aux mesures relatives effectuées à l'aide de l'analyseur de polarisation.

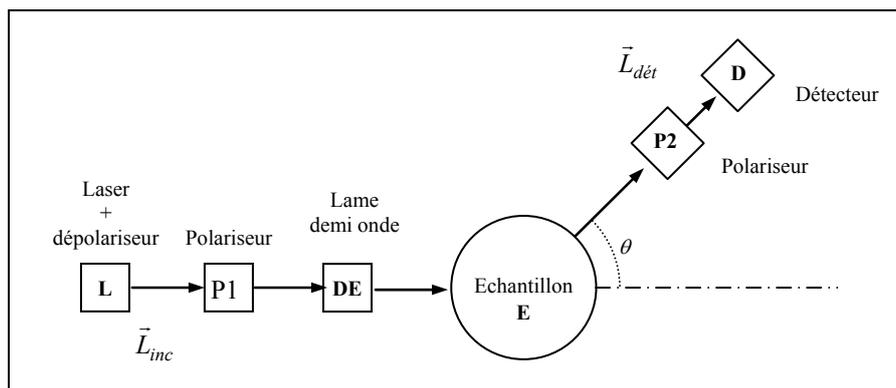


Figure 76 – Principe de mesure en polarisation croisée.

Comme nous l'avons déjà vu, les milieux liquides sont contenus dans des cuves en quartz de géométrie variable (cylindrique ou parallélépipédique) et dont l'épaisseur optique est modifiable (en fonction du parcours optique des cuves et des concentrations). Le milieu diffusant circule à vitesse contrôlée à travers un préparateur d'échantillons qui homogénéise la solution par agitation mécanique et par l'utilisation d'ultrasons. Les interfaces en quartz introduisent une dépolarisation supplémentaire si la détection n'est pas effectuée à la normale de la cuve : en projetant le vecteur de Stokes sur le plan de détection, il y a modification de la polarisation (cf. résolution de l'ETRP 1D et étude comportementale du chapitre II). Les cuves cylindriques ont donc l'avantage de ne pas changer la polarisation de la luminance diffusée contrairement aux autres cuves. En pratique, pour la détermination des *BRDF-BTDF* et du taux de dépolarisation (Q/I) on utilise des cuves plates à circulation qui sont modélisables par les outils numériques développés précédemment (résolution de l'ETRP 1D par une méthode d'*adding-doubling*).

Le vecteur de Stokes transmis après le passage des différents composants optiques est proportionnel à la multiplication des matrices de Mueller qui définissent ces composants (*cf.* Chapitre I). La détermination du facteur $Cte(\mu)$ sera le résultat de l'étalonnage de cette voie et inclura également les facteurs qui interviennent dans l'expression des matrices de Mueller de chaque composant optique. Notons γ_{P1} , γ_{P2} et γ_{DE} les angles formés entre le plan de référence (plan horizontal) et l'axe optique des différents composants, mesurés dans le sens trigonométrique. Le vecteur de Stokes diffusé et détecté ($\vec{L}_{dét}$) s'écrit :

$$\vec{L}_{dét}(\mu) = Cte(\mu) \cdot \mathbf{P2}(\gamma_{P2}) \cdot \mathbf{P}(\mu) \cdot \mathbf{DE}(\gamma_{DE}) \cdot \mathbf{P1}(\gamma_{P1}) \cdot \vec{L}_{inc} \quad \text{Eq. 188}$$

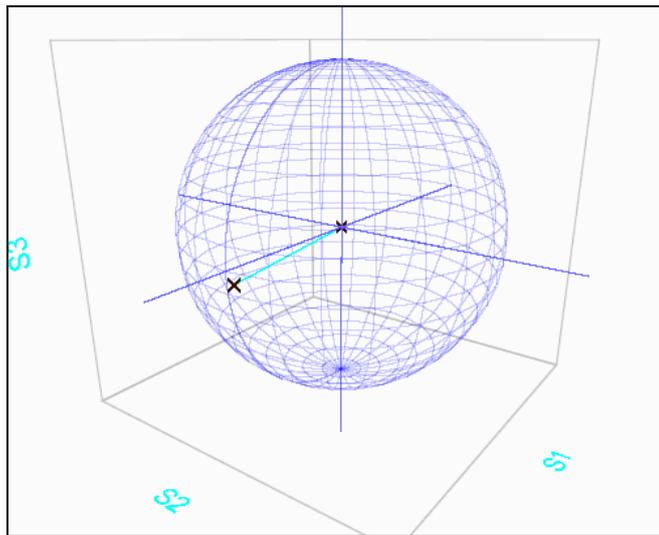
Le faisceau est complètement dépolarisé en sortie du laser. Le rayon lumineux traverse ensuite un polariseur (P1) de type Glan-Thompson pour fixer la polarisation rectiligne verticale (notation P). La matrice de Mueller de ce composant optique est donnée par l'Eq. 189 où γ_{P1} est une orientation quelconque.

$$\mathbf{P1}(\gamma_{P1}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\gamma_{P1} & \sin 2\gamma_{P1} & 0 \\ \cos 2\gamma_{P1} & \cos^2 2\gamma_{P1} & \sin 2\gamma_{P1} \cos 2\gamma_{P1} & 0 \\ \sin 2\gamma_{P1} & \sin 2\gamma_{P1} \cos 2\gamma_{P1} & \sin^2 2\gamma_{P1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 189}$$

La polarisation rectiligne verticale ou horizontale est obtenue lorsque γ_{P1} vérifie $\sin(2 \cdot \gamma_{P1}) = 0$, c'est-à-dire $\gamma_{P1} = 0 [\pi]$:

$$\mathbf{P1}(\gamma_{P1} = 0 [\pi/2]) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 190}$$

Ainsi, après avoir orienté le polariseur de façon à avoir $\gamma_{P1} = 0 [2\pi]$, le vecteur de Stokes relatif obtenu doit satisfaire $(1,1,0,0)^T$. Sa valeur est vérifiée expérimentalement et est reportée sur la Figure 77.



Vecteur de Stokes mesuré

$$S0 = 1,00$$

$$S1 = 0,95$$

$$S2 = 0,01$$

$$S3 = -0,08$$

Degrés de polarisation

$$DOP = 0,96$$

$$DOLP = 0,95$$

$$DOCP = -0,08$$

Figure 77 – Caractéristiques de la polarisation après le polariseur.

On peut constater un léger écart par rapport à la valeur théorique, probablement dû d'une part à un vecteur de Stokes non polarisé imparfait (comme nous l'avons précisé préalablement) et d'autre part mais dans une moindre mesure, à un manque de précision dans le positionnement du polariseur **P1**.

La lame demi-onde (**DE**) permet de passer simplement d'un état de polarisation rectiligne vertical (*P*) à un état de polarisation rectiligne horizontal (*S*) par une rotation de son axe optique de 45° . L'angle γ_{DE} est donc réglé en conséquence. La matrice de Mueller générale qui est associée à cet élément est la suivante :

$$\mathbf{DE}(\gamma_{DE}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\gamma_{DE} - \sin^2 2\gamma_{DE} & 2 \cdot \cos 2\gamma_{DE} \cdot \sin 2\gamma_{DE} & 0 \\ 0 & 2 \cdot \cos 2\gamma_{DE} \cdot \sin 2\gamma_{DE} & \sin^2 2\gamma_{DE} - \cos^2 2\gamma_{DE} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 191}$$

L'analyseur de polarisation est utilisé pour déterminer l'angle γ_{DE} . La Figure suivante présente les deux cas de polarisations rectilignes obtenus après passage de la lame demi-onde pour les angles $\gamma_{DE} = 45^\circ$ et $\gamma_{DE} = 135^\circ$. Pour un des deux cas, une représentation sous forme d'ellipse de la polarisation est choisie car les deux sphères de Poincaré sont semblables.

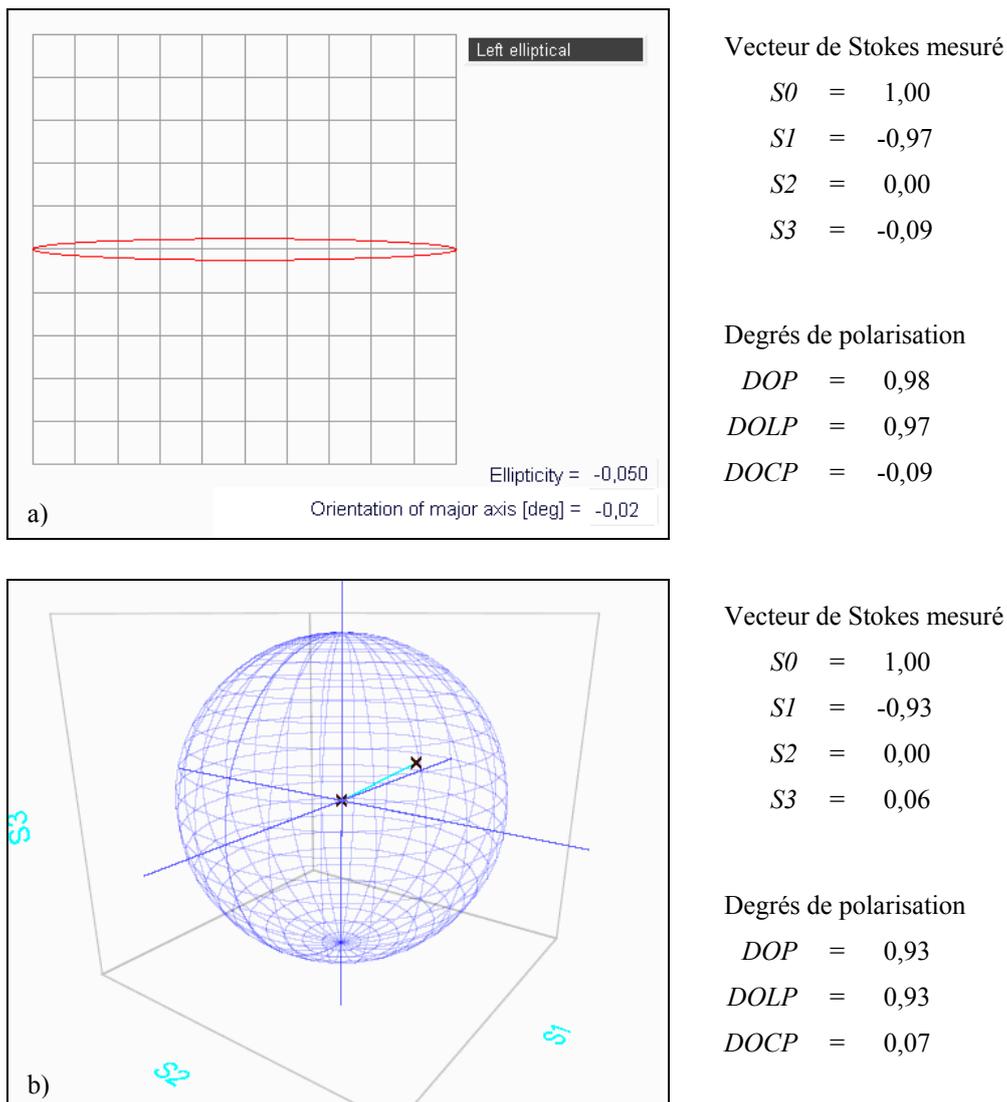


Figure 78 – Caractéristiques de la polarisation après la lame demi-onde pour a) $\gamma_{DE} = 45^\circ$ et b) $\gamma_{DE} = 135^\circ$.

La non-symétrie des résultats traduit probablement un léger décalage de l'axe de la demi-onde lors de son positionnement. Les résultats demeurent satisfaisants, la faible ellipticité résiduelle provenant sans doute du faisceau laser pseudo aléatoire.

Sur la Figure 71, les miroirs de renvoi qui éclairent l'échantillon sont traités pour maintenir l'état de la polarisation lorsqu'ils sont éclairés à 45° de la normale. Après leur passage, le *DOP* est amélioré. En effet, leur matrice de Mueller très voisine à 45° de la matrice identité favorise la recombinaison des modes pseudo-aléatoires.

Sur la Figure 79, le vecteur de Stokes en entrée de l'échantillon est mesuré pour une polarisation rectiligne horizontale et verticale par rotation de la lame demi-onde. On pourra noter néanmoins un vecteur de Stokes pour la polarisation *S* (horizontale) légèrement moins bon que pour la polarisation *P* (verticale).

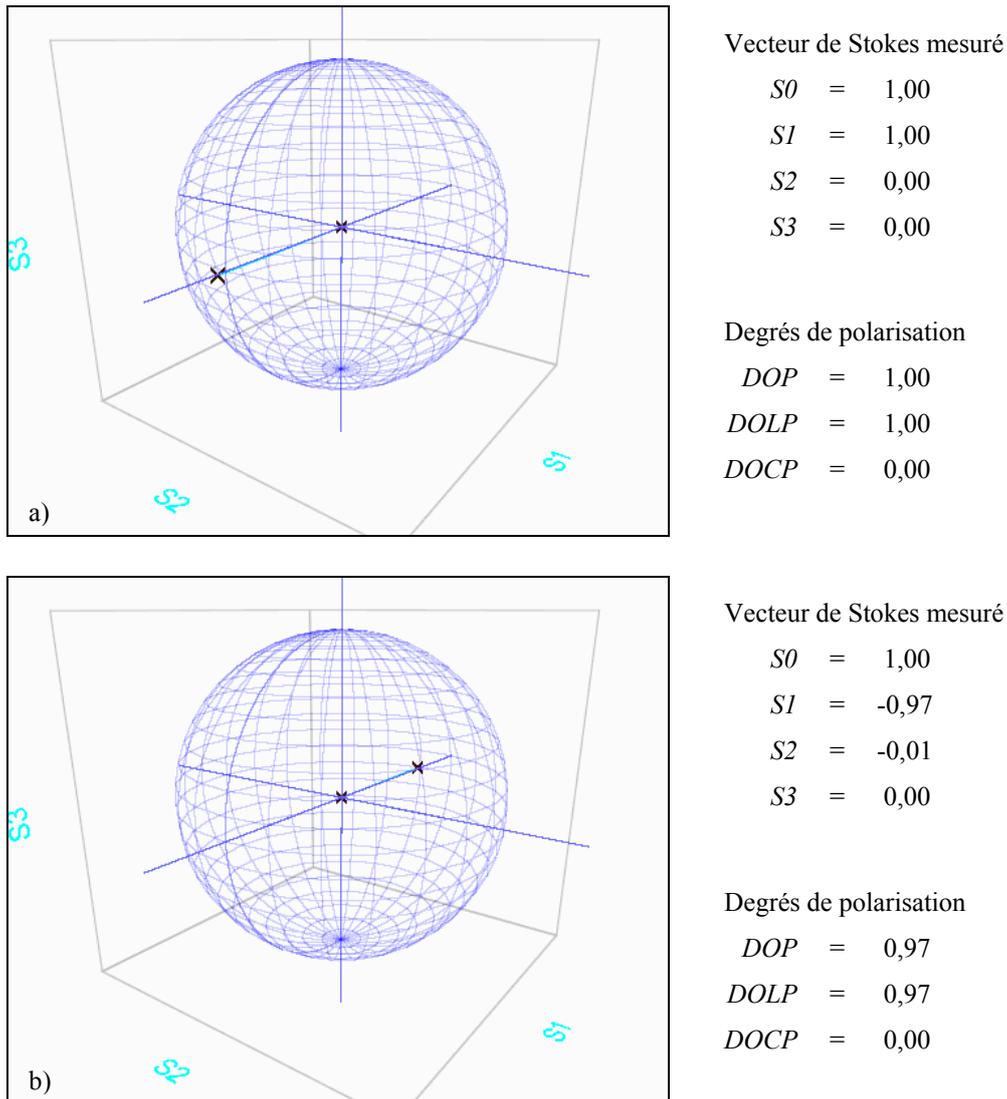


Figure 79 – Caractéristiques de la polarisation après les miroirs de renvoi, avant l'échantillon en a) polarisation verticale i.e. pour $\gamma_{DE} = 0^\circ$ et b) horizontale i.e. pour $\gamma_{DE} = 45^\circ$.

La luminance polarisée et incidente sur l'échantillon est ensuite modifiée lors de la traversée du milieu diffusant. Elle est multipliée par la matrice de Mueller $\mathbf{P}(\mu)$ du milieu diffusant qui tient compte du passage des interfaces de la cuve. Si l'échantillon est éclairé à la normale, la polarisation du faisceau transmis ne doit pas être modifiée puisque la matrice relative de transmission $\mathbf{t}_{01}(\lambda, \mu_0 = -1)$ définie dans le Chapitre II est égale à la matrice identité. La Figure suivante illustre ces propos en présentant le vecteur de Stokes après le passage d'une cuve plate en quartz vide, contenant de l'eau distillée ou contenant une solution aqueuse de particules de latex. Dans les trois cas, la polarisation reste totale mais on observe une légère déviation du vecteur polarisation sur la sphère de Poincaré. Cet écart est dû au passage des interfaces et à la présence de réflexions multiples à l'intérieur de la cuve. Il n'est pas possible de mesurer la polarisation en dehors de l'axe optique puisque l'instrument utilisé est un analyseur de faisceau.

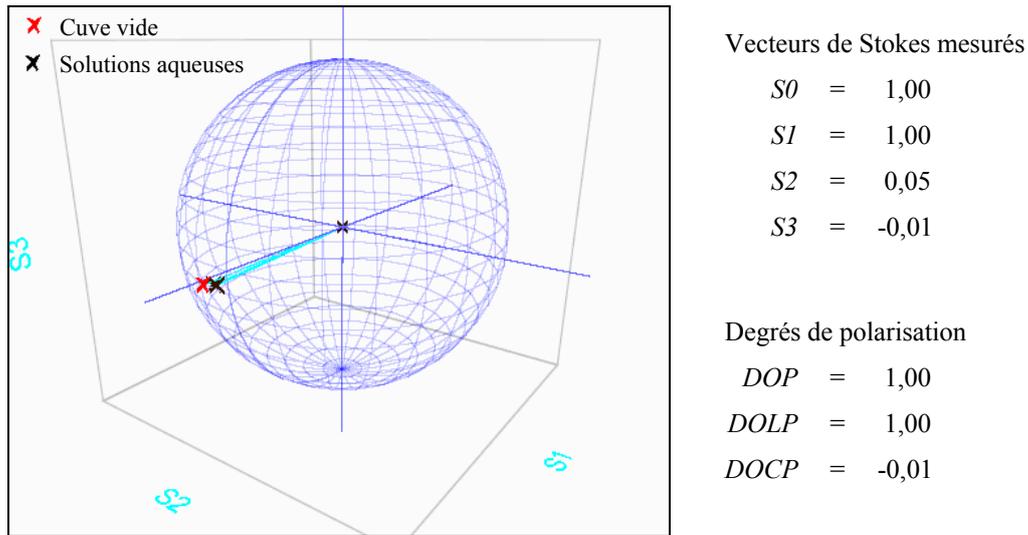


Figure 80 – Caractéristiques de la polarisation après la cuve à circulation.

Le dernier polariseur $\mathbf{P2}(\gamma_{P2})$ permet de projeter la luminance diffusée selon l'un des deux axes de polarisation \vec{u}_P et \vec{u}_S (cf. Eq. 190). Ainsi, si la polarisation incidente est rectiligne (notation X), les termes issus de la mesure en polarisation croisée sont :

- en projection selon l'axe \vec{u}_P (polarisation verticale)

$$\vec{L}_{dét}(\mu) = Cte_{XP}(\mu) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}(\mu) \cdot \begin{pmatrix} L_{inc} \\ L_{inc} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 192}$$

- en projection selon l'axe \vec{u}_S (polarisation horizontale)

$$\vec{L}_{dét}(\mu) = Cte_{XS}(\mu) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}(\mu) \cdot \begin{pmatrix} L_{inc} \\ L_{inc} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 193}$$

Les variables $Cte_{XP}(\mu)$ et $Cte_{XS}(\mu)$ font intervenir à la fois les constantes de l'Eq. 188 (notation Cte) et les facteurs présents dans l'écriture des matrices de Mueller des différents composants (par exemple, le facteur 1/2 de l'Eq. 190). Ces grandeurs dépendent de l'état de la polarisation incidente ($X = P$ ou $X = S$). Nous reviendrons sur la détermination de ces quatre variables dans la partie consacrée à l'étalonnage de cette voie.

Pour terminer la présentation de la mesure en polarisation croisée, la projection sur les axes est vérifiée expérimentalement. Nous considérons un éclairage incident polarisé en P . En plaçant un polariseur défini selon l'axe \vec{u}_P , toute l'intensité est transmise jusqu'au détecteur et sa mesure est possible *via* les outils analogiques et numériques (par exemple, la détection synchrone). A l'inverse, si on choisit de placer un polariseur orienté selon \vec{u}_S , aucun signal ne doit être détecté tant que la polarisation incidente sur cet élément optique est verticale. La Figure 81 valide ce principe sur les deux axes de polarisation. Cette expérience a également été conduite après rotation de la lame demi-onde **DE** pour valider l'autre état de polarisation (S) qu'il est possible d'avoir avec ce montage expérimental.

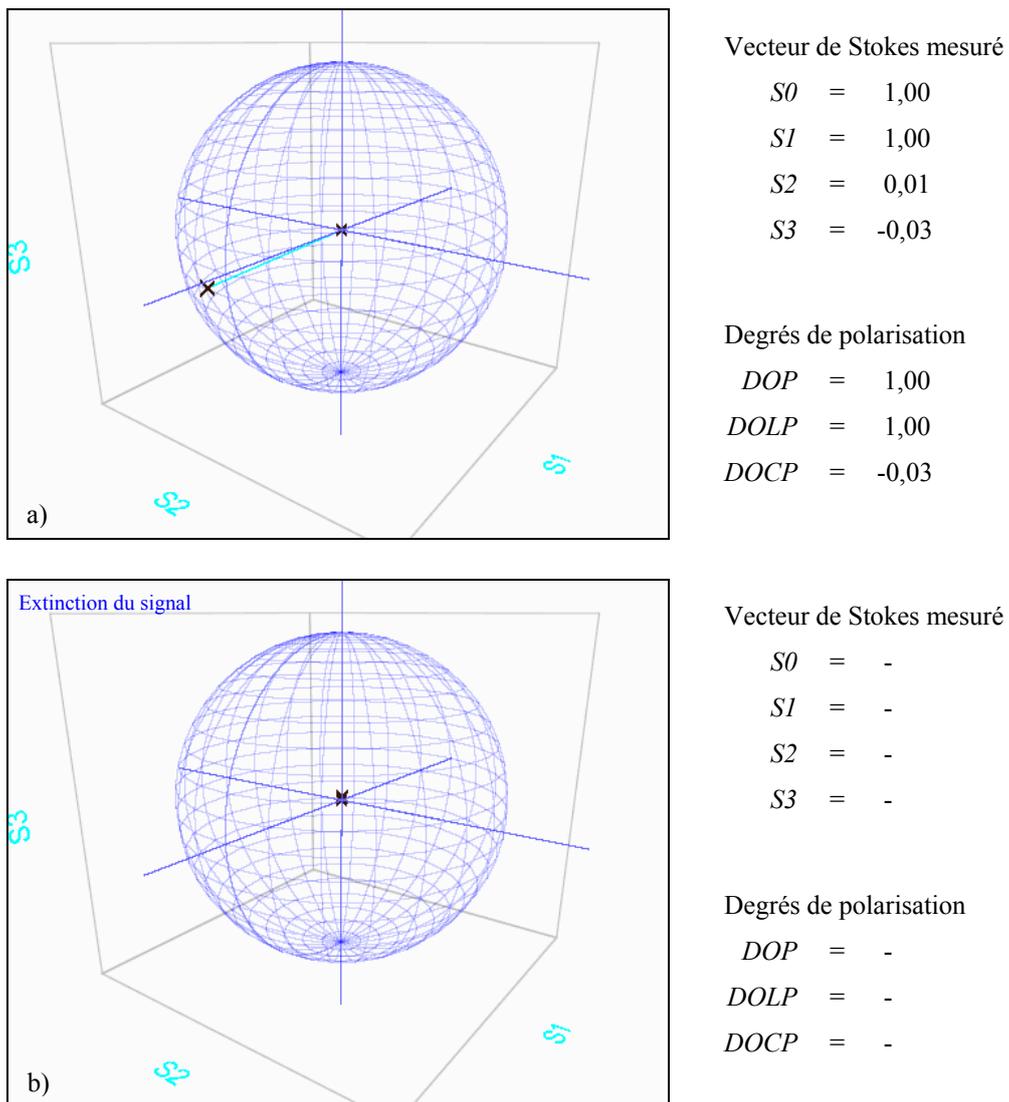


Figure 81 – Caractéristiques de la polarisation avant la détection : projections selon les axes a) \vec{u}_P et b) \vec{u}_S .

3.3 SYNTHÈSE

Le calibrage de la polarisation présenté dans ce paragraphe ne fait intervenir que des grandeurs normalisées du vecteur de Stokes. Ces dernières sont mesurées par un analyseur de polarisation après passage des différents éléments optiques constituant les différentes voies de mesures. Les résultats obtenus sont globalement satisfaisants et conformes aux prédictions des modèles instrumentaux présentés. Pour pouvoir nous confronter aux simulations de *BRDF-BTDF* polarisées, la mesure absolue des luminances non polarisée ou en polarisation croisée, autrement-dit la détermination des constantes $Cte(\mu)$, nécessite désormais un étalonnage radiométrique du banc et la détermination des fonctions d'appareil.

4 ETALONNAGE DES VOIES DE MESURE DE LA DIFFUSION

L'étalonnage s'applique à des milieux de référence pour déterminer la fonction d'appareil des différentes voies de mesure. Les mesures faites en relatif (par exemple, pour la mesure de l'extinction ou lors du calibrage de la polarisation) ne nécessitent pas l'introduction de données radiométriques. En revanche, la détermination de la *BRDF-BTDF* ou du taux de dépolarisation sont à rapprocher de données étalonnées. L'étalonnage absolu du banc (voie non polarisée et polarisation croisée uniquement) requiert la détermination de la fonction d'appareil du montage pour corriger les erreurs issues d'un mauvais alignement du système de détection. L'évolution du banc prévoit l'intégration d'une voie en polarisation modulée présentée en Annexe. Son étalonnage n'est pas présenté ici et constitue une perspective d'application des travaux actuels car celle-ci devrait s'inspirer d'une démarche identique.

L'évolution angulaire du lobe de diffusion des milieux diffusants de référence est connue à la longueur d'onde d'intérêt. Nous utilisons :

- pour la réflexion, un étalon spectralon dont la réflectivité angulaire a été modélisée à partir de nombreuses mesures jusqu'à 75° (avec validation théorique de la diffusion lambertienne). En première approximation, nous ferons l'hypothèse qu'il dépolarise complètement la lumière dans toutes les directions lorsque l'angle d'incidence correspond à la normale de l'échantillon. Néanmoins, des travaux^[28] réalisés sur ce type de matériau indiquent de légères différences sur les *BRDF* mesurées à 30° en polarisation croisée (*PP*) et (*PS*). Toutefois, nous pouvons penser que ces faibles différences sont encore plus modestes en incidence normale et/ou pour un éclairage non polarisé. La Figure 82 présente la courbe d'étalonnage du spectralon utilisé : la réflectance directionnelle hémisphérique est de 99% à 532 nm.
- pour la transmission et la réflexion, des particules de latex de granulométrie connue. Les données de référence sont simulées numériquement par résolution de l'ETRP 1D et comparées aux données expérimentales.

Dans cette partie, nous déduisons les constantes d'étalonnage à partir de l'écriture formelle du vecteur de Stokes. Ensuite, nous les déterminons expérimentalement : les deux méthodes (spectralon et particules de latex) sont comparées dans le domaine angulaire correspondant à la réflexion. La détermination des constantes n'étant pas liée à l'échantillon, les deux fonctions d'appareil doivent avoir un comportement semblable pour $-1 < \mu < 0$.

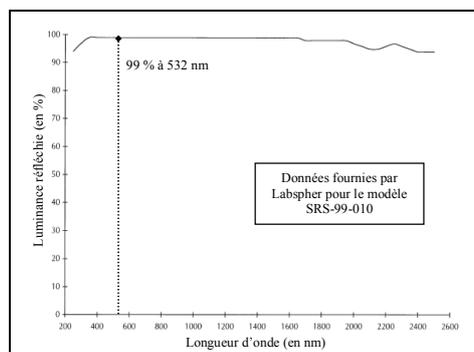


Figure 82 – Réflectance étalonnée (en %) pour le spectralon en fonction de la longueur d'onde d'éclairage.

4.1 EXPRESSIONS FORMELLES DES CONSTANTES D'ETALONNAGE

Si l'on reprend l'écriture du vecteur de Stokes diffusé en fonction des éléments présents sur le parcours optique, il est possible de relier les données mesurées aux données simulées.

- **Mesure étalonnée du premier terme du vecteur de Stokes diffusé par l'échantillon**

Expérimentalement, le détecteur ne mesurant que des flux non polarisée, seul le premier élément du vecteur de Stokes diffusé par l'échantillon \vec{L}_{det} est mesuré. C'est un scalaire qui vérifie :

$$L_{det}^{X,Y} = \frac{F_{det}^Y}{P_{inc}^X \cdot \Delta\Omega_{col}} \quad \text{Eq. 194}$$

où :

- $X = \{NP, P, S\}$ et $Y = \{NP, P, S\}$ correspondent respectivement à l'état de la polarisation incidente et à l'état de la polarisation détectée en fonction des optiques placées devant le détecteur,
- P_{inc}^X est la puissance laser incidente sur l'échantillon qui dépend de la configuration de polarisation en entrée $X = \{NP, P, S\}$ et qui est proportionnelle à la puissance laser : $P_{inc}^X = T_{inc}^X \cdot P_{laser}$,
- $\Delta\Omega_{col}$ est l'angle solide de collection,
- F_{det}^Y est le flux diffusé en entrée du système de collection. Ce flux est proportionnel au flux collecté par le système optique en fonction de la configuration de polarisation en analyse $Y = \{NP, P, S\}$: $F_{col}^Y = T_{det}^Y \cdot F_{det}^Y$ et dépend aussi intrinsèquement de cette configuration. Le flux collecté est quant à lui proportionnel au signal mesuré par la détection synchrone $S_{mes}^Y = K \cdot F_{col}^Y$.

Nous présentons en Annexe la démarche pour établir les constantes T et K utilisées dans l'Eq. 194 ci-dessus.

- **Modélisation du vecteur de Stokes diffusé par l'échantillon**

La résolution numérique de l'ETRP 1D donne accès aux $BRDF$ - $BTDF$ polarisées (*i.e.* le vecteur de Stokes non normalisé \vec{L}_{det} diffusé en sortie de l'échantillon). D'une manière générale, en remplaçant la matrice de diffusion globale $\mathbf{P}(\mu)$ du milieu diffusant par ses coefficients, celui-ci s'écrit :

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 195}$$

Les relations du Tableau 23 relient la matrice de phase du milieu (avec prise en compte des interfaces) aux éléments du vecteur de Stokes simulé en fonction du vecteur de Stokes incident, dans un cas supposé idéal.

	Etat de la polarisation incidente		
	Non polarisé (<i>NP</i>) $S_0 = 1$ et $S_1 = 0$	Polarisation <i>P</i> $S_0 = 1$ et $S_1 = 1$	Polarisation <i>S</i> $S_0 = 1$ et $S_1 = -1$
$I =$	P_{11}	$P_{11} + P_{12}$	$P_{11} - P_{12}$
$Q =$	P_{21}	$P_{21} + P_{22}$	$P_{21} - P_{22}$
$U =$	P_{31}	$P_{31} + P_{32}$	$P_{31} - P_{32}$
$V =$	P_{41}	$P_{41} + P_{42}$	$P_{41} - P_{32}$

Tableau 23 – Relations entre le vecteur de Stokes simulé et les éléments de la matrice de diffusion.

Seuls les deux premiers éléments du vecteur de Stokes (I et Q) représentent un réel intérêt dans notre étude pour l'identification des paramètres. Il est aussi à noter que leur détermination par une mesure permettrait de remonter aux quatre premiers termes de la matrice de diffusion.

- **Cas idéal**

Dans un premier temps, on considère que les axes de polarisation sont bien alignés. L'Eq. 192 et l'Eq. 193 se réécrivent sous la forme :

$$\vec{L}_{\text{dét}}^{X,P}(\mu) = \mu \cdot \text{Cte}_{X,P}(\mu) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I(\mu) \\ Q(\mu) \\ U(\mu) \\ V(\mu) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 196}$$

$$\vec{L}_{\text{dét}}^{X,P}(\mu) = \mu \cdot \text{Cte}_{X,P}(\mu) \cdot \begin{pmatrix} I(\mu) + Q(\mu) \\ I(\mu) + Q(\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 197}$$

et :

$$\vec{L}_{\text{dét}}^{X,S}(\mu) = \mu \cdot \text{Cte}_{X,S}(\mu) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I(\mu) \\ Q(\mu) \\ U(\mu) \\ V(\mu) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 198}$$

$$\vec{L}_{\text{dét}}^{X,S}(\mu) = \mu \cdot \text{Cte}_{X,S}(\mu) \cdot \begin{pmatrix} I(\mu) - Q(\mu) \\ -I(\mu) + Q(\mu) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 199}$$

Pour une détection non polarisée, on obtient :

$$\vec{L}_{dét}^{X, NP}(\mu) = \mu \cdot Cte_{X, NP}(\mu) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I(\mu) \\ Q(\mu) \\ U(\mu) \\ V(\mu) \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 200}$$

Au final, nous obtenons les relations suivantes entre le terme mesuré et la simulation :

$$\begin{aligned} L_{dét}^{NP, NP}(\mu) &= \mu \cdot Cte_{NP, NP}(\mu) \cdot I(\mu) \\ L_{dét}^{X, P}(\mu) &= \mu \cdot Cte_{X, P}(\mu) \cdot (I(\mu) + Q(\mu)) \\ L_{dét}^{X, S}(\mu) &= \mu \cdot Cte_{X, S}(\mu) \cdot (I(\mu) - Q(\mu)) \end{aligned} \quad \text{Eq. 201}$$

Ces relations permettent alors de déterminer les constantes en comparant les mesures effectuées à des simulations en supposant un vecteur de Stokes incident relatif parfait. Nous devons en toute logique :

- retrouver des constantes invariantes en fonction de l'angle, ce qui traduit un bon alignement du système,
- des valeurs voisines de l'unité si d'une part, l'étalonnage radiométrique absolu que nous avons choisi est bien maîtrisé et si d'autre part, le calibrage des vecteurs de Stokes incident et l'alignement des optiques de polarisation en détection sont de bonne qualité comme les résultats préalablement établis tendent à le montrer.

En d'autres termes, la détermination des fonctions d'appareil constitue non seulement un moyen de corriger les erreurs résiduelles mais permet aussi de vérifier la qualité du moyen de mesure.

Une fois les constantes déterminées, les valeurs utiles pour l'identification des paramètres s'écriront alors :

$$\begin{aligned} \frac{L_{dét}^{NP, NP}(\mu)}{Cte_{NP, NP}(\mu)} = \mu \cdot I(\mu) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \left[\frac{L_{dét}^{X, P}(\mu)}{Cte_{X, P}(\mu)} + \frac{L_{dét}^{X, S}(\mu)}{Cte_{X, S}(\mu)} \right] = \mu \cdot I(\mu) \\ \text{et} \quad \left[\frac{L_{dét}^{X, P}(\mu)}{Cte_{X, P}(\mu)} - \frac{L_{dét}^{X, S}(\mu)}{Cte_{X, S}(\mu)} \right] = \mu \cdot Q(\mu) \end{aligned} \quad \text{Eq. 202}$$

Nous pouvons dès à présent discuter de l'influence de l'orientation des optiques en analyse et de la qualité de la polarisation du faisceau incident.

- **Influence de l'état de polarisation incident sur la correspondance entre la mesure et la simulation**

Le calibrage de la voie de mesure en polarisation croisée a montré que l'état de polarisation du faisceau n'était pas toujours optimal (comparativement aux simulations). Par exemple, le *DOLP* mesuré sur la Figure 79 est de 97 % avant l'échantillon au lieu de 100%. Dans ce cas, le vecteur de Stokes incident sur l'échantillon est donné par $(1, DOLP, 0, 0)^T$. On limite l'observation à une variation de degré de polarisation linéaire car la résolution numérique de l'ETRP en géométrie 1D n'est donnée qu'en polarisation rectiligne (*cf.* Chapitre II).

En pondérant certains éléments P_{ij} de la matrice de phase par le *DOLP* (positif en *P* et négatif en *S*), les vecteurs de Stokes diffusés s'écrivent :

$$\begin{aligned} I &= P_{11} + DOLP \cdot P_{12} \\ Q &= P_{21} + DOLP \cdot P_{22} \end{aligned} \quad \text{Eq. 203}$$

En supposant que $P_{22} \approx P_{11}$ et que $P_{21} \approx P_{12}$ (ce sont des hypothèses raisonnables pour la plupart des milieux diffusants constitués de particules orientées aléatoirement, même en présence d'interfaces), nous avons alors :

$$\left| \frac{\Delta(I \pm Q)}{I \pm Q} \right| \approx 0,5 \cdot [1 - |DOLP|] \quad \text{Eq. 204}$$

En tenant compte de la valeur du *DOLP* mesuré, nous obtenons une erreur relative de 1,5%. Cette valeur nous permet de considérer le vecteur de Stokes incident comme parfait.

- **Influence de l'orientation des éléments optiques sur la correspondance entre la mesure et la simulation**

Dans un second temps, nous cherchons à identifier l'erreur commise sur la mesure lorsque l'alignement des optiques d'analyse n'est plus parfait. Une mauvaise orientation des éléments optiques placés devant le détecteur et/ou de leur axe de polarisation γ_P modifie également le signal détecté. Pour bien dissocier les phénomènes mis en jeu, le *DOLP* est maintenant nul ou égal à 1 : $\vec{L}_{inc} = (1, 0, 0, 0)^T$ ou $\vec{L}_{inc} = (1, \pm 1, 0, 0)^T$. La contribution d'un troisième terme noté *U* en plus des deux premiers termes du vecteur de Stokes (*I* et *Q*) intervient dans l'écriture du signal détecté.

$$\begin{aligned} L_{dét}^{X,P}(\mu) &= \mu \cdot Cte_{X,P}(\mu) \cdot (I(\mu) + \alpha_Q \cdot Q(\mu) + \alpha_U \cdot U(\mu)) \\ L_{dét}^{X,S}(\mu) &= \mu \cdot Cte_{X,S}(\mu) \cdot (I(\mu) - \alpha'_Q \cdot Q(\mu) - \alpha'_U \cdot U(\mu)) \end{aligned} \quad \text{Eq. 205}$$

Ces grandeurs sont pondérées par α_Q ou α_U que l'on détermine à partir de la matrice de Mueller générale d'un polariseur (*cf.* Eq. 189). Les valeurs prises par le dernier terme $U(\mu)$ sont explicitées dans le Tableau 23.

Par exemple, le calcul relatif de l'erreur en polarisation P nous donne alors :

$$\left| \frac{\Delta L_{\text{dét}}^{X,P}(\mu)}{L_{\text{dét}}^{X,P}(\mu)} \right| = \frac{|(1 - \alpha_Q) \cdot x(\mu)| + |\alpha_U \cdot y(\mu)|}{1 + x(\mu)} \quad \text{Eq. 206}$$

avec y le rapport U/I et x le rapport Q/I .

Pour un écart de 2° de l'axe optique du polariseur placé devant le détecteur, nous avons : $\alpha_Q = 0,998$ et $\alpha_U = 0,07$. Nous avons pu montrer que la contribution de $U(\mu)$ est relativement faible dans le plan d'incidence pour une incidence normale sur l'échantillon et quelque soit l'état de polarisation incident (cf. chapitre II). Considérons donc un majorant pour le rapport en fixant $y = 0,3$. Pour le rapport $x = Q/I$ en polarisation P , nous prenons $x = 1$ comme majorant au numérateur et un minorant au dénominateur, à savoir $x = -0,5$. En utilisant les valeurs précitées, nous obtenons une erreur maximale voisine de 3% pour une erreur angulaire de 2° . Là encore, malgré les cas extrêmes considérés, cette valeur reste faible. Nous pouvons dans une première approche supposer les éléments optiques d'analyse parfaitement alignés.

- **Synthèse**

Les expressions des composantes du vecteur de Stokes telles que nous venons de les décrire permettent de rapprocher les résultats expérimentaux de ceux issus des simulations numériques. Elles permettent aussi de remonter aux fonctions d'appareils qu'on vérifiera dans le prochain paragraphe, puisque par construction, elles sont proches de l'unité. Un mauvais alignement des axes de polarisation peut être source de perturbations avec la contribution de nouveaux termes de la matrice de diffusion dans le signal détecté. Néanmoins par la suite, compte tenu du rapide bilan d'erreur effectué, nous considérerons que l'alignement et l'état de la polarisation incidente sont idéaux. Il est à noter néanmoins que ces incertitudes, si elles existent, seront prises en compte lors de la comparaison « mesures – simulations » établie pour déterminer les fonctions d'appareil. En effet, elles seront obligatoirement à prendre en compte lorsqu'il s'agira de remonter au rapport Q/I à partir des mesures. Il sera alors nécessaire de soustraire des signaux pour remonter à une valeur de Q pouvant être faible.

A présent, il est nécessaire de construire les fonctions d'appareil de chacune des voies de l'instrument en se basant sur l'étude de milieux parfaitement connus tels que des spectralons ou des particules de latex en suspension dans l'eau.

4.2 DETERMINATIONS EXPERIMENTALES DES FONCTIONS D'APPAREIL

L'évaluation des fonctions appareil est réalisée par comparaison des données expérimentales avec des données de référence qui sont issues :

- des simulations numériques de la diffusion de la lumière par des particules de latex étalonnées. La résolution de l'ETRP 1D par *adding-doubling* prend en compte les différents états de la polarisation incidente et permet de retrouver la *BRDF-BTDF* polarisées *i.e.* $\mu \cdot I$ et $\mu \cdot Q$. Les particules de latex utilisées (*Duke 4010A*) ont un indice de 1,58, un diamètre de 1,02 μm et sont placées dans une cuve à faces parallèles de parcours optique $e = 200 \mu\text{m}$. L'épaisseur optique théorique est proche de $\tau = 1$: son calcul est lié à la fraction volumique de particules de latex mises en solution et à leur granulométrie. L'albédo est considéré comme étant égal à 1 puisque le liant (eau distillée) n'est pas absorbant.
- de la diffusion lambertienne d'un spectralon éclairé à la normale de sa surface. La dépolarisation de ce milieu devant être complète, le rapport Q/I doit être pratiquement nul quel que soit l'état de la polarisation incidente. Par hypothèse, Q est donc nul quel que soit l'angle et quelle que soit la polarisation incidente. La donnée simulée $\mu \cdot I$ correspond à une diffusion lambertienne corrigée par la réflectance ρ du spectralon, à savoir $\mu \cdot I = \rho \cdot \mu / \pi$. Ce type d'échantillon opaque n'autorise des mesures que dans le demi-espace réfléchi *i.e.* pour les $\mu \in [-1; 0]$.

Dans ce paragraphe, les constantes de l'étalonnage de chacune des voies sont déterminées expérimentalement. L'utilisation de deux échantillons différents (spectralon et particules de latex) permet de les comparer sur des domaines angulaires qui se recouvrent. Nous avons choisi de travailler avec une épaisseur optique faible pour ne pas avoir une forte dépolarisation et conserver des signaux exploitables en polarisation croisée, en particulier pour un faisceau incident polarisé. Cela nous permet de considérer deux cas extrêmes, le spectralon étant un matériau fortement dépolarisant

Considérons dans un premier temps le cas non polarisé.

• Détermination de $Cte_{NP,NP}(\mu)$: **Eclairement non polarisé (NP), détection non polarisée (NP)**

La Figure 83a compare les mesures de $BRDF-BTDF$ faites sur ces échantillons et leurs valeurs simulées. Les mesures sont effectuées avec des puissances laser différentes pour vérifier l'indépendance des constantes au flux incident. On fixe par exemple $P_{laser} = 0,45 \text{ W}$ dans le cas des particules de latex et $P_{laser} = 0,70 \text{ W}$ dans le cas du spectralon. Ces puissances sont mesurées directement à la sortie du laser. Elles sont modifiées après le passage successif des optiques et nous déterminons la puissance incidente sur l'échantillon grâce à l'étalonnage radiométrique.

Sur les deux premières courbes de mesure, nous pouvons constater que la géométrie du système ne permet pas d'accéder à des angles inférieurs à 5° car il y a occultation partielle du faisceau laser par les optiques de détection.

La $BRDF$ mesurée sur le spectralon est pratiquement confondue avec la diffusion théorique, exceptée pour les grands angles de diffusion. Lorsqu'on considère les particules de latex, on observe un bon accord entre les deux $BTDF$. Le niveau global de la $BRDF-BTDF$ mesurée correspond à celui des valeurs théoriques. Seul le comportement angulaire diffère en réflexion où des oscillations apparaissent.

La fonction d'appareil notée $Cte_{NP,NP}(\mu)$ qui en résulte (cf. Figure 83b) est quasi constante sur tout le domaine angulaire, est voisine de 1 et reste identique quelle que soit la puissance du laser. Sans interface (cf. spectralon), la correction à apporter aux données mesurées est faible voire inexistante pour les angles proches de la normale. Dans le cas des particules de latex, le passage d'interfaces introduit un effet angulaire sur la $BRDF-BTDF$ mesurée et par conséquent, des oscillations sur la constante d'étalonnage. Cette correction devient importante pour les grands angles de diffusion.

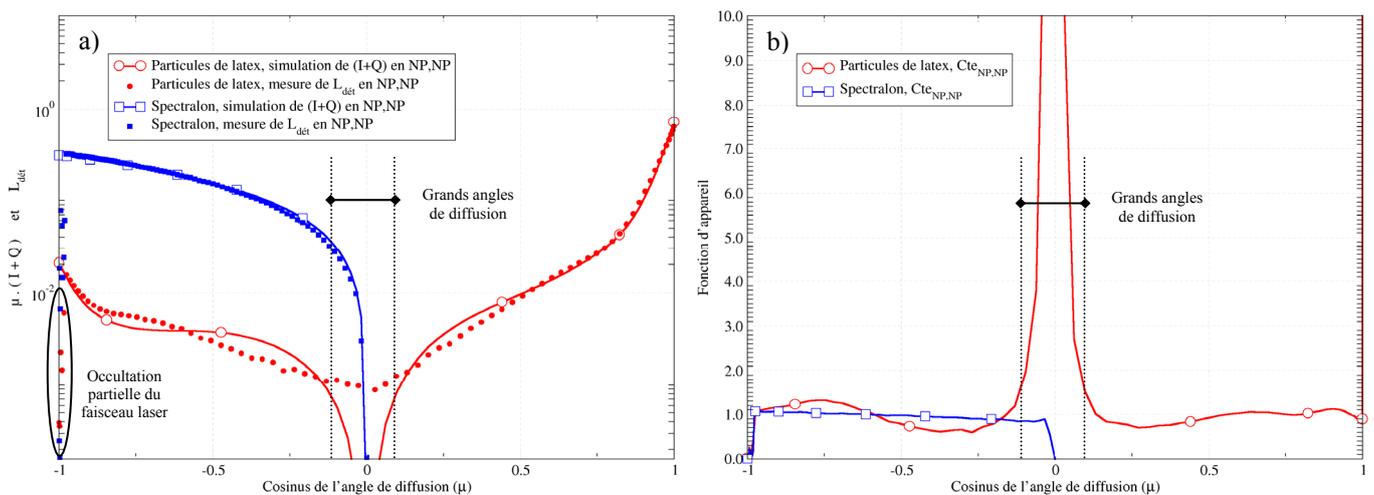


Figure 83 – a) Comparaison entre les données mesurées et les données simulées, b) détermination de la constante d'étalonnage $Cte_{NP,NP}(\mu)$.

En transmission, on peut attribuer l'écart à l'unité de la constante d'étalonnage à la présence d'agrégats résiduels qui peuvent se former dans la solution ou à la présence de corps étrangers à notre étude (poussières par exemple). Le passage aux ultrasons des solutions permet de diminuer la présence d'agrégats de grandes tailles. Néanmoins, les quelques agrégats restant peuvent diffuser fortement vers l'avant et l'épaisseur optique étant faible, cet effet demeure sensible.

Différents travaux^{[29][122]} ont mis en avant l'écart constaté entre les données simulées et les données expérimentales dans le domaine de la réflexion. Drolen *et al.* attribuent ce phénomène aux réflexions multiples qu'il peut y avoir sur une cuve de petite taille. L'hypothèse selon laquelle l'échantillon est semi-infini n'est pas entièrement vérifiée et des problèmes d'alignement de la cuve sur l'axe optique sont également envisagés. Comme cela a déjà été montré^[30], on est moins sensible à ces effets lorsque l'épaisseur optique augmente.

De cette première étude, on retiendra que la correction à apporter aux valeurs mesurées reste faible exceptée pour les grands angles de diffusion. Cette correction tient compte du passage éventuel d'interfaces lorsqu'on utilise des cuves « plates ». En effet, elles introduisent des variations angulaires plus ou moins importantes dans le domaine de la réflexion.

• Détermination de $Cte_{NP,P}(\mu)$ et $Cte_{NP,S}(\mu)$: **Eclairement non polarisé (NP), détection polarisée (P ou S)**

Les mesures polarisées sont faites sur les deux échantillons de référence pour un vecteur de Stokes incident égal à $(1,0,0)^T$. Les constantes angulaires qui relient les données mesurées $L_{dét}^{NP,Y}(\mu)$ aux données simulées (I, Q) s'écrivent :

$$Cte_{NP,P}(\mu) = \frac{L_{dét}^{NP,P}(\mu)}{\mu \cdot (I(\mu) + Q(\mu))} \quad \text{et} \quad Cte_{NP,S}(\mu) = \frac{L_{dét}^{NP,S}(\mu)}{\mu \cdot (I(\mu) - Q(\mu))} \quad \text{Eq. 207}$$

Le numérateur et le dénominateur de l'Eq. 207 sont représentés sur la Figure 84. Les remarques faites dans le cas précédents restent valables lorsqu'on projette la luminance diffusée selon les deux axes de polarisation \vec{u}_P et \vec{u}_S .

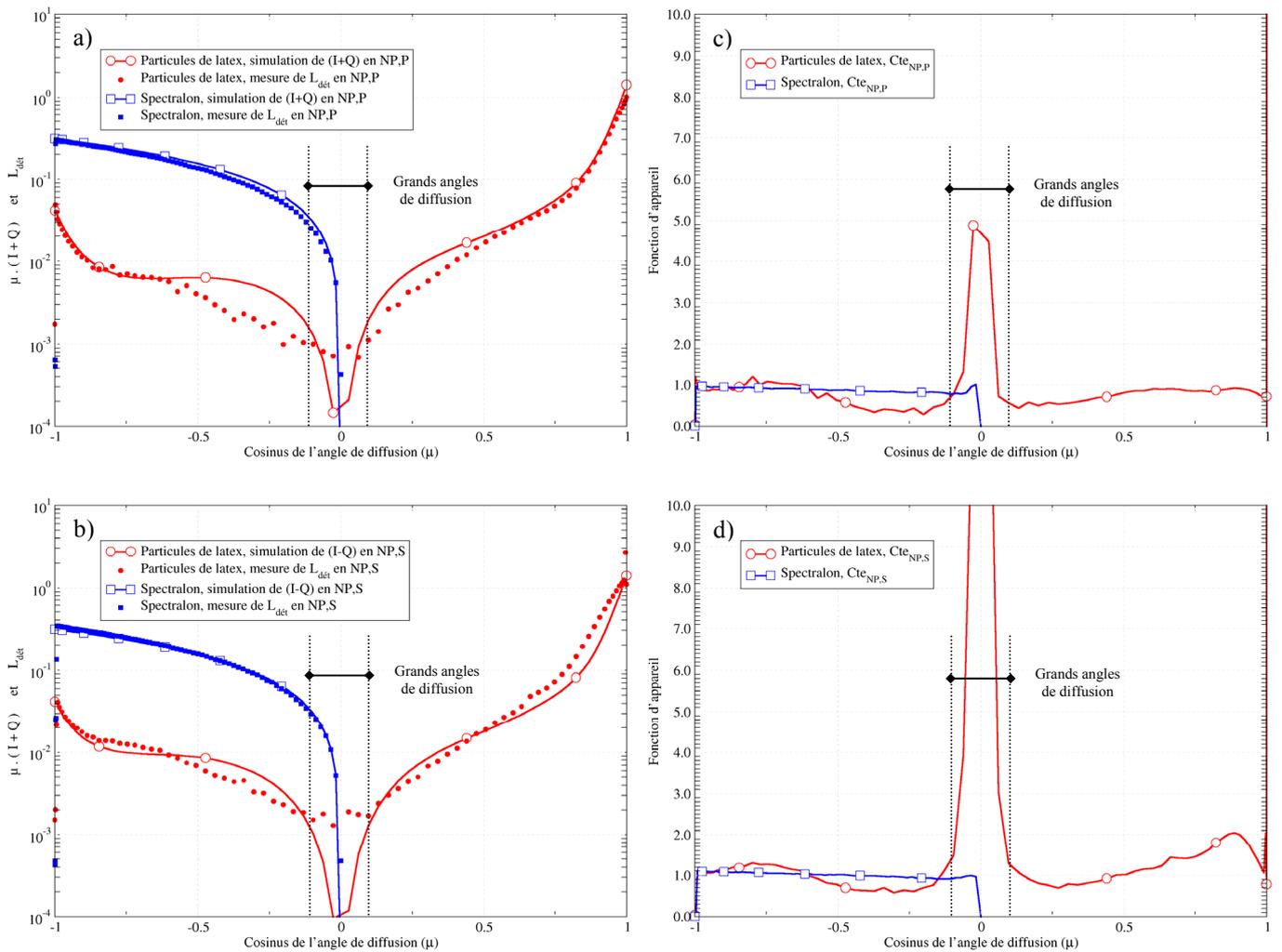


Figure 84 – a-b) Comparaison entre les données mesurées et les données simulées pour un éclairement non polarisé, c-d) détermination des constantes d'étalonnage $Cte_{NP,P}(\mu)$ et $Cte_{NP,S}(\mu)$.

Dans le cas du spectralon, la correction angulaire ($Cte_{NP,P}$ ou $Cte_{NP,S}$) reste faible sur un large domaine angulaire. Pour les particules de latex, cette correction est identique au cas précédent lorsque $\mu \in [-1;0]$. L'écart est cependant plus important en transmission sur la Figure 84d.

• **Détermination de $Cte_{P,P}(\mu)$ et $Cte_{P,S}(\mu)$:** *Eclairement polarisé verticalement (P), détection polarisée*

La polarisation de l'onde incidente est fixée dans un état rectiligne vertical. La luminance diffusée est ensuite projetée selon les deux axes de polarisation \vec{u}_P et \vec{u}_S . En s'inspirant de la démarche précédente, les constantes sont obtenues à partir des données expérimentales telles que :

$$Cte_{P,P}(\mu) = \frac{L_{dét}^{P,P}(\mu)}{\mu \cdot (I(\mu) + Q(\mu))} \quad \text{et} \quad Cte_{P,S}(\mu) = \frac{L_{dét}^{P,S}(\mu)}{\mu \cdot (I(\mu) - Q(\mu))} \quad \text{Eq. 208}$$

Les polariseurs dichroïques ne sont pas parfaits. D'après les données fournies par le fabricant (*cf.* Annexes de ce chapitre), 1/10000 du signal polarisé en P traverse ce composant optique et est collectée sur le détecteur. Par la suite, nous retirons cette contribution au flux détecté en polarisation croisée.

Pour les deux échantillons de référence (particules de latex et spectralon), les données expérimentales et les données simulées sont comparées dans les mêmes conditions que celles évoquées lors de la détermination des constantes non polarisées. La variation angulaire des constantes d'étalonnage est représentée sur la Figure 85a-c.

Dans le cas des particules de latex sur la Figure 85c, le comportement angulaire des luminances est très différent entre les données simulées et les données expérimentales. Jusqu'à présent, toutes les simulations sont obtenues dans le plan $\varphi = 0^\circ$. Tant que l'éclairement incident est non polarisé et à la normale de l'échantillon, la contribution des autres plans φ est constante (*cf.* symétrie du problème) et ne dépend pas des conditions de mesure (angle solide de collection, coplanarité des faisceaux incident et diffusé, *etc.*). Désormais, il faut intégrer le signal détecté sur un certain angle solide défini par $\Delta\varphi$ et $\Delta\theta$. La quadrature numérique tenant compte du deuxième intervalle, il reste à moyenniser le signal détecté sur les plans azimutaux voisins de la direction d'éclairement. En effet, nous avons vu dans le Chapitre II que la luminance dans les plans $\varphi \neq \varphi_0$ est différente si l'on est polarisé ou si l'on est hors incidence normale.

Sur la Figure 85d, on remarque que l'écart entre les données expérimentales et les données simulées pour $\varphi = 0^\circ$ est d'autant plus important que l'on est proche de la normale. Pour $\mu = \pm 1$, tous les plans φ contribuent alors qu'en $\mu \approx 0$, le plan incident $\varphi = 0^\circ$ suffit à exprimer la luminance diffuse. Le produit scalaire entre la normale du détecteur et la direction diffusée doit être supérieur au *cosinus* de l'angle de collection du système optique. L'équation suivante doit être vérifiée :

$$\sin \theta_{dét} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi + \cos \theta \cdot \cos \theta_{dét} \geq \cos \alpha \quad \text{Eq. 209}$$

avec $\theta_{dét}$ l'angle zénithal de détection qui correspond à la normale du détecteur, θ et φ les angles polaires qui correspondent à la direction de la luminance diffusée collectée et α l'angle de collection du système optique (pour rappel, ce dernier vaut environ 1° dans notre cas).

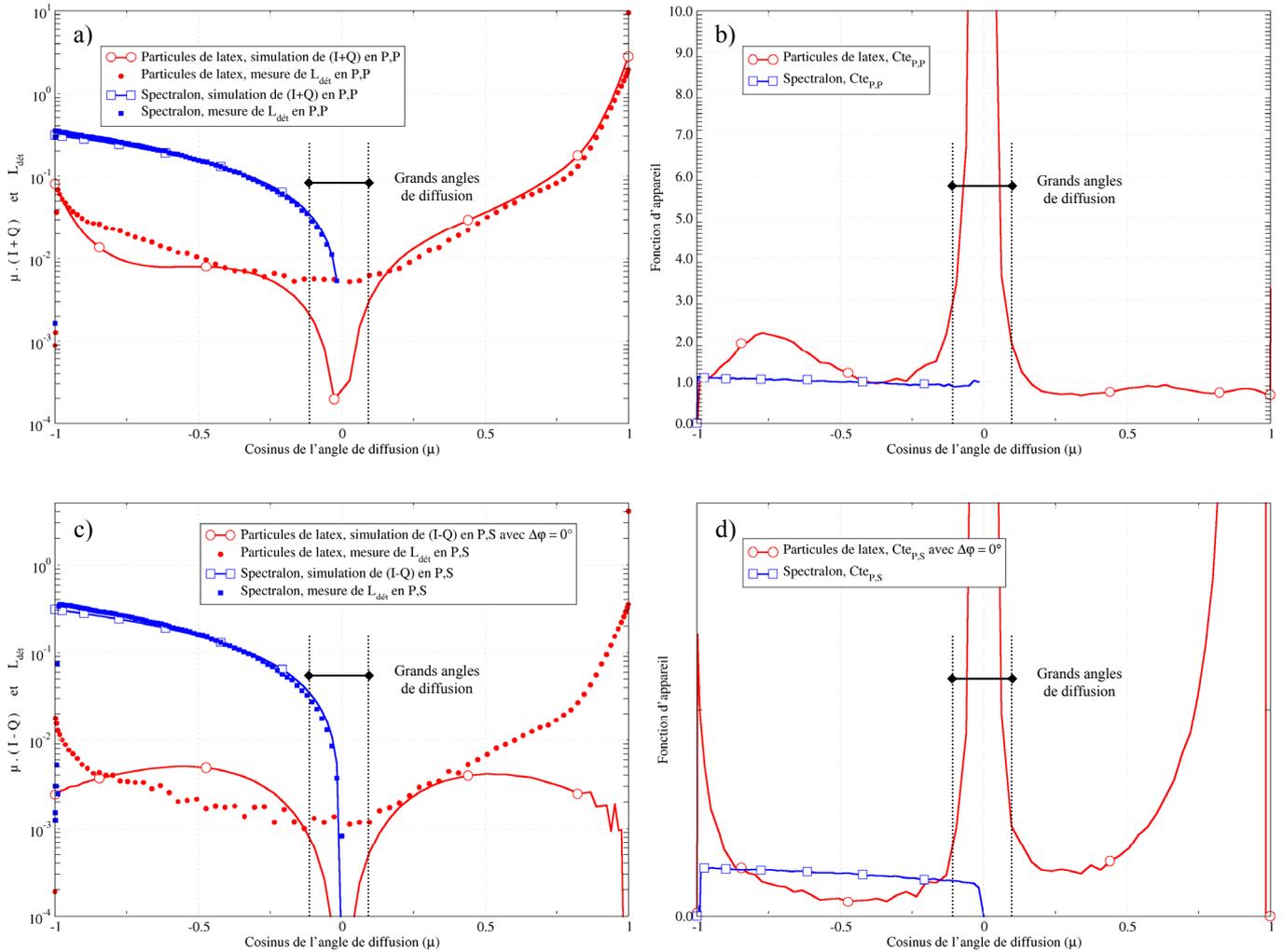


Figure 85 – a-b) Comparaison entre les données mesurées et les données simulées pour un éclairage incident vertical, c-d) première détermination des constantes d'étalonnage $Cte_{p,p}(\mu)$ et $Cte_{p,s}(\mu)$.

Sur la Figure 86, on considère $\varphi = 0^\circ$ et le signal est intégré tel que $\Delta\varphi = 60^\circ$. Cette démarche est appliquée sur tous les angles zénithaux. La simulation s'approche de la valeur expérimentale et la constante d'étalonnage se rapproche de l'unité : l'écart précédent est atténué. Cette remarque est bien vérifiée pour les angles proches de la normale. On remarque une différence de niveau entre les constantes d'étalonnage calculées en réflexion et en transmission. On retrouve sur la transmission l'offset constaté sur les mesures (NP,S). De plus, le comportement angulaire en réflexion est identique à celui déjà observé sur les données non polarisées. On attribue cette variation au mauvais alignement des optiques de détection combiné à un effet de la cuve.

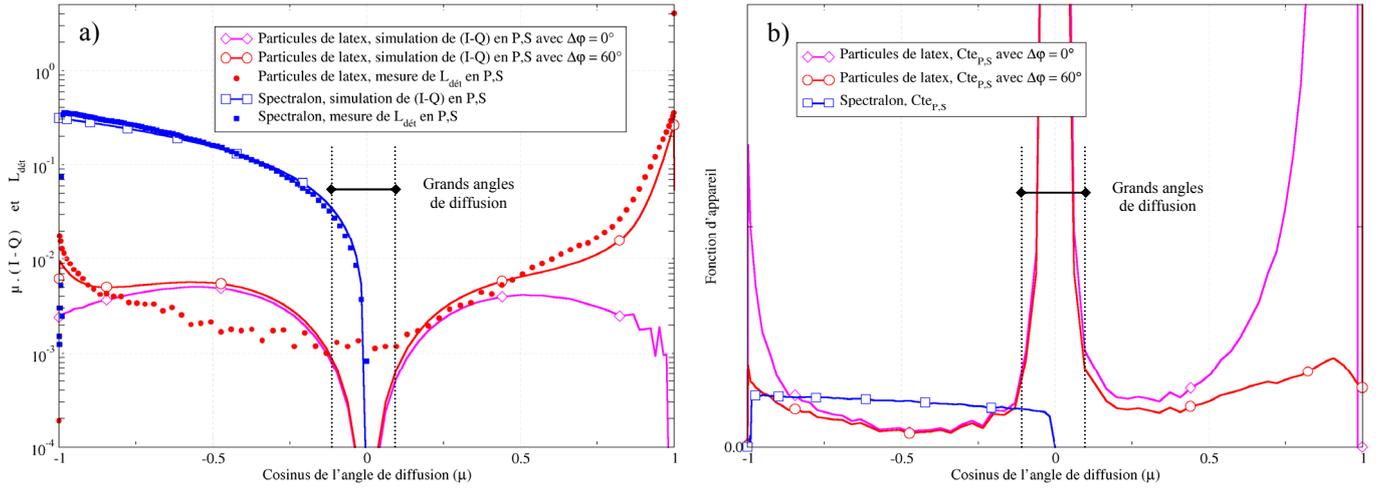


Figure 86 – a-b) Nouvelle détermination des constantes d'étalonnage $Cte_{p,S}(\mu)$.

• **Détermination de $Cte_{SS}(\mu)$ et $Cte_{SP}(\mu)$:** *Eclairement polarisé horizontalement (S), détection polarisée*

Le vecteur de Stokes incident est fixé tel que : $\vec{L}_{inc} = (1, -1, 0, 0)^T$. Les constantes d'étalonnage s'écrivent alors sous la même forme que l'Eq. 208 *i.e.* :

$$Cte_{S,P}(\mu) = \frac{L_{det}^{S,P}(\mu)}{\mu \cdot (I(\mu) + Q(\mu))} \quad \text{et} \quad Cte_{S,S}(\mu) = \frac{L_{det}^{S,S}(\mu)}{\mu \cdot (I(\mu) - Q(\mu))} \quad \text{Eq. 210}$$

Pour les deux milieux de référence, la valeur des deux constantes est représentée sur la Figure 87c-d. Lorsque la polarisation est croisée (S,P), la correction angulaire est plus importante dans le cas des particules de latex, notamment pour le domaine de la transmission (différence de niveau). Toutefois, on tend bien vers des constantes qui sont voisines de l'unité. On notera l'importance de prendre en compte les plans φ voisins de $\varphi = 0^\circ$.

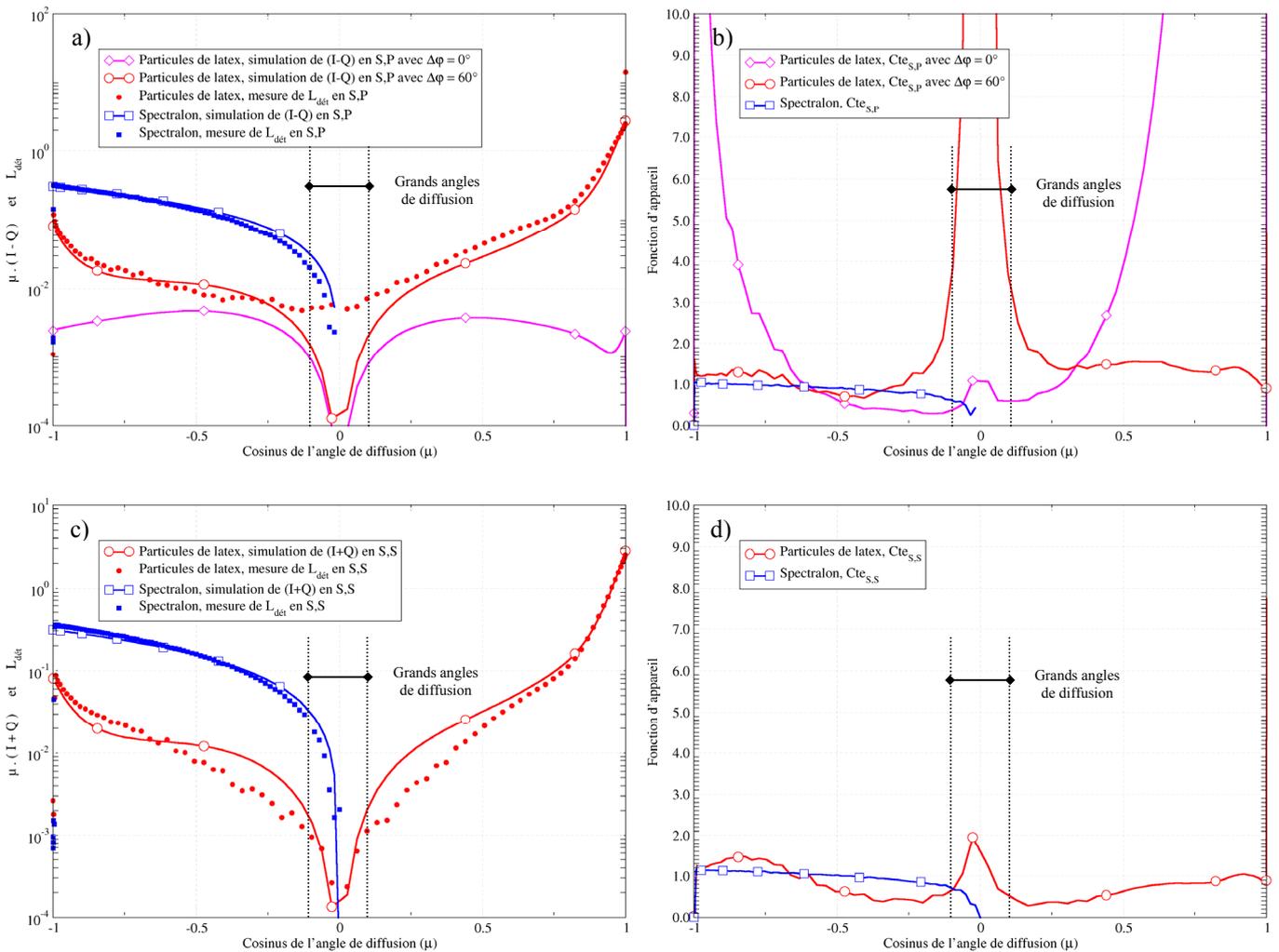


Figure 87 – a-b) Comparaison entre les données mesurées et les données simulées pour un éclairement horizontal, c-d) détermination des constantes d'étalonnage $Cte_{S,P}(\mu)$ et $Cte_{S,S}(\mu)$.

- **Bilan sur la détermination des constantes d'étalonnage**

Nous venons de déterminer les différentes constantes d'étalonnage. Elles sont voisines de 1 en règle générale, ce qui traduit une procédure d'étalonnage et de calibrage satisfaisante dans son ensemble. Elles restent néanmoins soumises à la présence d'artefacts liés à la cuve, à des incertitudes résiduelles dans les procédures de calibrage ou d'étalonnage radiométrique ou tout simplement à une inadéquation entre la simulation et la mesure (cas de l'éclairement polarisé), tous ces phénomènes pouvant se coupler entre-deux.

De plus, les grands angles de diffusion sont mal déterminés car le rapport signal sur bruit diminue rapidement pour ces angles. Le signal mesuré correspond alors au niveau minimum que la chaîne d'acquisition peut détecter (*cf.* mesures de bruit sur le détecteur). Une solution consisterait à augmenter la puissance laser ou à augmenter l'angle de collection du système de détection. Toutefois, en augmentant cet angle, on augmente également la contribution des autres plans φ si l'éclairement est polarisé. En effet, nous avons montré qu'il est nécessaire de vérifier dans les simulations numériques l'Eq. 209 pour chaque valeur des angles diffusés. Un compromis entre ces deux approches devra être fait à l'avenir.

Toutes les fonctions d'appareil utiles pour notre étude ont été identifiées et estimées. En appliquant ces corrections aux données mesurées sur le banc expérimental, il est possible de retrouver les luminances absolues diffusées par un milieu quelconque. Ces valeurs sont exploitables dans le code d'optimisation numérique pour retrouver les paramètres radiatifs du milieu.

5 CALIBRAGE DE LA TROISIEME VOIE POUR LES MESURES D'EXTINCTION

Cette voie est utilisée pour retrouver l'épaisseur optique d'un milieu à partir d'une mesure d'extinction du faisceau laser transmis. L'objectif de cette étude est la détection du faisceau collimaté après passage dans le milieu, en considérant le même état de polarisation que celui de la luminance incidente \vec{L}_{inc} . La Figure 88 illustre ce principe et complète la présentation du banc déjà faite avec la Figure 72.

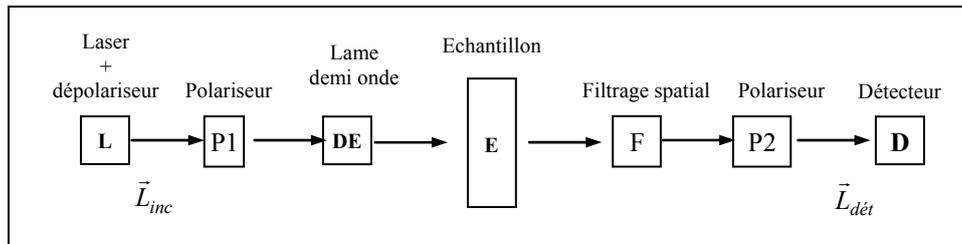


Figure 88 – Principe de la mesure d'extinction.

- **Calibrage de la voie d'extinction avec des densités neutres**

La détermination de l'épaisseur optique sur la troisième voie du banc dépend du rapport (*i.e.* mesures relatives) des intensités transmises avec ou sans le milieu diffusant. L'efficacité du filtre spatial exprimée en pourcent, correspond au rapport entre l'intensité mesurée avant et après le filtre. Après un réglage optimal de la position de la lentille et du filtre, l'efficacité est de 54,6 %. Les densités neutres utilisées sont déjà calibrées en fonction de la longueur d'onde. A 532 nm, les données fournies par le constructeur (Filtres *Melles-Griot* de densité optique $DO_{théo}$) permettent d'établir l'épaisseur optique théorique telle que :

$$\tau_{théo} = \ln\left(10^{DO_{théo}}\right) \quad \text{Eq. 211}$$

Les mesures sont effectuées avec une puissance laser $P_{laser} = 2,02W$ qui est supérieure à 1 W pour que l'émission laser soit stable. Cette puissance est atténuée par une première densité optique $DO = 2$. La puissance réelle mesurée en entrée de la voie d'extinction est donc de 17,6 mW.

On notera un bon accord entre les données mesurées et les données réelles des épaisseurs optiques avec une erreur relative inférieure à 5 % dans la plupart des cas présentés sur la Figure 89. Nous avons vu précédemment qu'il était préférable de limiter notre étude à $\tau < 14$ pour avoir un rapport signal sur bruit faible. Au-delà de $\tau = 16$, nous obtenons des résultats satisfaisants mais l'épaisseur retrouvée est sous-estimée du fait d'un manque de signal (par rapport au niveau de bruit). Il est à noter que ce type de mesures sur des densités neutres (sans diffusion) ne valide pas l'efficacité de filtrage du diffus du système. Elles permettent uniquement d'établir la limite de détection, la qualité de l'alignement et de valider la procédure mise en œuvre. Des mesures sur des milieux diffusants d'épaisseurs optiques connues sont nécessaires.

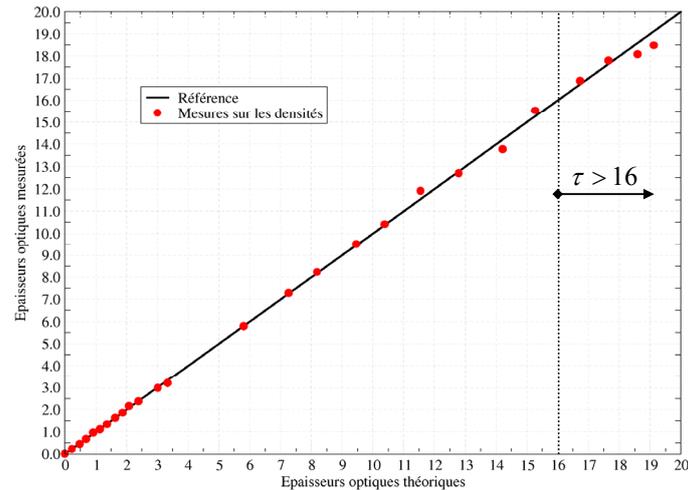


Figure 89 – Courbes de comparaison entre les épaisseurs optiques mesurées et théoriques.

- **Premières mesures d'extinction sur une cuve contenant des particules de latex**

Pour des particules de rayon moyen $r_g = 993$ nm (référence *Duke 4009B*) et de concentration volumique $C_V = 1\%$, l'épaisseur optique théorique est $\tau_{théo} = 9,4$. La première mesure effectuée sur le banc est en accord avec cette valeur puisqu'on obtient : $\tau_{mes} = 9,34$ soit un écart inférieur à 1%. D'autres mesures à des épaisseurs optiques plus faibles donnent des résultats similaires. Nous n'avons pas pu néanmoins accroître l'épaisseur optique en augmentant la concentration car nous aurions été soumis à des effets de diffusion dépendante.

La voie d'extinction permet de réaliser une mesure relative entre deux intensités et de déterminer l'épaisseur optique d'un milieu. Nous venons de calibrer ce moyen avec des densités neutres de référence et un exemple de milieu constitué par des particules étalonnées. On notera qu'il est important de réaliser rapidement les mesures sur les cuves plates pour éviter des résultats erronés. En effet, sans circulation du milieu aqueux, les grosses particules ($r_g > 500$ nm) retombent par gravitation au fond de la cuve.

6 VALIDATION DES CONCEPTS ET EXPLOITATION DE DONNEES POLARISEES

L'objectif de cette partie est :

- tout d'abord, de valider les fonctions d'appareils et la complémentarité des mesures avec un faisceau laser non polarisé,
- de valider expérimentalement la démarche d'identification des paramètres radiatifs que nous avons adoptée, à savoir les concepts introduits dans les précédents chapitres et la méthode d'optimisation.

La mesure en polarisation croisée (avec un faisceau incident non polarisé) permet de retrouver la *BRDF-BTDF* et le taux de dépolarisation. La voie d'extinction mesure directement l'extinction d'un milieu pour des épaisseurs optiques inférieures à $\tau = 16$. Elle sert donc à vérifier la bonne détermination de ce paramètre par les méthodes d'optimisation.

Les mesures de *BRDF-BTDF* et de *Q/I* sont effectuées sur des milieux liquides contenant des particules de latex dont la granulométrie est connue. Le faisceau collimaté, présent en $\mu = 1$ sur les courbes de mesures, n'est pas pris en compte dans nos modèles de résolution de l'ETRP. Les données acquises pour cet angle ne sont pas prise en compte lors de l'application de la procédure d'optimisation.

6.1 VALIDATION DES CONSTANTES D'APPAREIL

Nous travaillons sur un milieu de même épaisseur optique $\tau = 1$ que celui ayant servi à établir les fonctions d'appareil. Le milieu de référence est toujours constitué par des particules de latex (référence *Duke 4010* de diamètre $1,02 \mu\text{m}$). Une cuve de géométrie identique mais de parcours optiques plus grand est néanmoins utilisée. Nous devons donc diluer la solution employée précédemment.

Dans ce paragraphe, on cherche à valider les constantes d'appareil définies précédemment pour un faisceau laser incident non polarisé (*NP*). Sur ce milieu, nous effectuons une analyse non polarisée (*NP*) et en polarisation croisée (*P* et *S*). Les signaux détectés sont ensuite transformés en utilisant l'étalonnage radiométrique défini par l'Eq. 194 afin de déterminer $L_{\text{det}}^{NP,NP}$, $L_{\text{det}}^{NP,P}$ et $L_{\text{det}}^{NP,S}$. Nous calculons alors les *BRDF-BTDF* en utilisant la relation suivante :

$$\frac{L_{\text{det}}^{NP,NP}(\mu)}{Cte_{NP,NP}(\mu)} = \mu \cdot I(\mu) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{L_{\text{det}}^{NP,P}(\mu)}{Cte_{NP,P}(\mu)} + \frac{L_{\text{det}}^{NP,S}(\mu)}{Cte_{NP,S}(\mu)} \right] = \mu \cdot I(\mu) \quad \text{Eq. 212}$$

La Figure 90 représente les différentes $BRDF-BTDF$ obtenues en utilisant les constantes d'appareil préalablement établies, soit sur les milieux diffusants de références (*i.e.* solutions de latex + cuve) ou sur le spectralon. Pour ce dernier, nous symétrisons les résultats obtenus en réflexion sur les constantes d'appareil pour les appliquer en transmission.

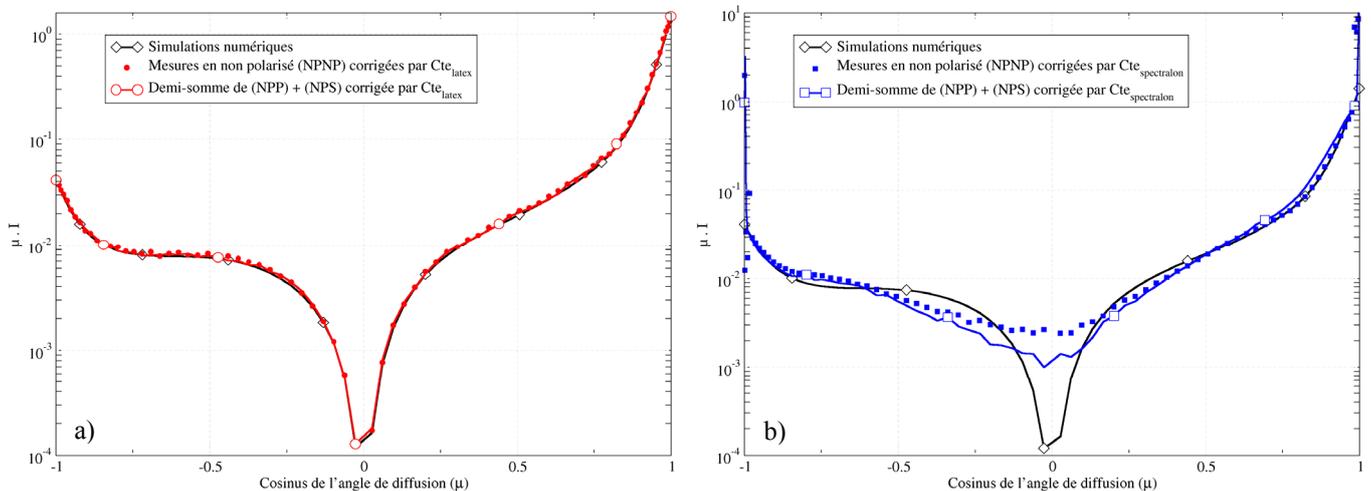


Figure 90 – Validation expérimentale de l'additivité des polarisations sur la $BRDF-BTDF$ et comparaison avec les données simulées.

a) En utilisant les constantes d'étalonnage faites avec la cuve et les particules de latex, b) en appliquant les constantes d'étalonnage déduites des mesures sur le spectralon.

En éclairage non polarisé (NP) et en détection non polarisée, la $BRDF-BTDF$ expérimentale corrigée par la constante d'étalonnage $Cte_{NP,NP}^{latex}$ correspond bien à celle simulée (*cf.* Figure 90a). Autrement dit, la fonction d'appareil établie à une certaine épaisseur optique pour une cuve corrige efficacement les résultats sur une autre cuve de géométrie identique mais de parcours optique différent. Cela laisse à penser que les phénomènes ondulatoires observés sur une cuve sont plutôt définis par le couple géométrie - épaisseur optique que par le parcours optique. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point par la suite. L'additivité des mesures effectuées en analyse croisée de la polarisation est aussi vérifiée sur ces données expérimentales corrigées par les constantes issues du latex : les trois courbes de $BRDF-BTDF$ sont en effet superposées.

Une démarche identique est faite en appliquant les constantes d'étalonnage données par le spectralon. Contrairement au cas précédent, la correction est quasi constante et proche de l'unité sur tout le domaine angulaire. La Figure 90b présente les résultats obtenus. On constate alors que la $BRDF-BTDF$ n'est pas retrouvée parfaitement, surtout pour les grands angles de diffusion. L'additivité des états de polarisation semble satisfaisant mais l'écart entre la demi-somme des mesures en analyse polarisée et la mesure non polarisée est plus important que dans le cas précédent, en particulier aux grands angles. Cela laisse à penser que le spectralon ne dépolarise pas complètement le rayonnement comme nous l'avons supposé en première approximation, même en incidence normale et pour un éclairage non polarisé.

6.2 VALIDATION DU CONCEPT GENERAL

Dans cette partie, nous souhaitons montrer la faisabilité de la méthode développée tout le long de ce manuscrit à partir de quelques exemples d'application. Les données expérimentales corrigées par la fonction d'appareil correspondante sont introduites dans les modèles numériques d'optimisation. Le lien entre ces différentes grandeurs est donné par l'Eq. 212 pour les *BRDF-BTDF* et la relation suivante pour le calcul du terme Q (et *in fine* le rapport Q/I) :

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{L_{dét}^{NP,P}(\mu)}{Cte_{NP,P}(\mu)} - \frac{L_{dét}^{NP,S}(\mu)}{Cte_{NP,S}(\mu)} \right] = \mu \cdot Q(\mu) \quad \text{Eq. 213}$$

- **Premier cas d'étude : cas « parfait »**

Considérons le même milieu que celui utilisé pour déterminer les fonctions d'appareil dans le paragraphe précédent. Les particules de latex ont un diamètre de $1,02 \mu\text{m}$, c'est-à-dire un rayon proche de la valeur de la longueur d'onde du laser : $r_g = 0,510 \mu\text{m} = 0,96 \cdot \lambda_0$. La cuve utilisée permet de fixer l'épaisseur optique à $\tau = 1$. Enfin, le milieu hôte est non absorbant puisqu'il est constitué d'eau distillée. L'albédo est donc égal à $\omega = 1$.

L'application des fonctions d'appareil définies précédemment dans le cas des particules de latex nous permet de retrouver des données d'entrée semblables aux données réelles. L'erreur commise sur la détermination des différents paramètres radiatifs correspond à la précision des méthodes numériques car les données instrumentales sont quasi identiques au calcul théorique. Ces résultats sont reportés dans le Tableau 24.

	ω	τ	r_g
Valeur réelle	1,00	1,00	$0,96 \cdot \lambda_0$
Valeur initiale	0,80	2,00	$\lambda_0 / 2$
Valeur retrouvée	0,98	1,07	$\approx \lambda_0$
Erreur	2 %	7 %	7 %

Tableau 24 – Premier cas d'étude : paramètres retrouvés après optimisation à partir des données corrigées par les fonctions d'appareil liées aux particules de latex.

Une deuxième approche est envisagée. Les données mesurées sont maintenant corrigées par les constantes d'étalonnage trouvées sur le spectralon. Ainsi, on ne tient pas compte de la baisse du signal pour les grands angles de diffusion. Les valeurs retrouvées sont regroupées dans le Tableau 25.

	ω	τ	r_g
Valeur réelle	1,00	1,00	$0,96 \cdot \lambda_0$
Valeur initiale	0,80	2,00	$\lambda_0 / 2$
Valeur retrouvée	0,90	1,63	$1,03 \cdot \lambda_0$
Erreur	10%	63%	8%

Tableau 25 – Premier cas d'étude : paramètres retrouvés après optimisation à partir des données corrigées par les fonctions d'appareil liées au spectralon.

La Figure suivante permet de mieux comprendre les écarts constatés sur la détermination des paramètres. La $BRDF-BTDF$ est pratiquement retrouvée lorsqu'on applique les constantes $Cte_{NP,P}^{spectralon}$ et $Cte_{NP,S}^{spectralon}$, notamment pour les angles proches de la normale. Ainsi, la granulométrie du milieu est parfaitement retrouvée puisque la fonction « objectif » liée à r_g est définie dans ce domaine angulaire. L'albédo est également retrouvé avec un écart proche de 10% car le niveau global de la $BRDF-BTDF$ est peu affecté par l'application des fonctions d'appareil du spectralon. Ce dernier provient de l'étalonnage radiométrique, les fonctions d'appareil sur le spectralon ne corrigeant qu'une imperfection d'alignement aux grands angles. L'absence de la correction des phénomènes ondulatoires liés à la cuve par l'utilisation d'un étalonnage sur spectralon ne semble pas préjudiciable sur la prise en compte de la $BRDF-BTDF$ dans l'optimisation.

En revanche, l'épaisseur optique n'est pas retrouvée efficacement. En traçant le taux de dépolarisation mesuré, on remarque que sa valeur est cohérente pour les petits angles de diffusion en réflexion ($-1 < \mu < -0,5$) mais qu'elle semble erronée pour les autres angles. Le point « zéro », essentiel à l'identification de τ , n'est pas accessible sur la Figure 91b car la correction apportée sur les données d'entrée est insuffisante : le spectralon ne corrige pas ici l'effet lié à la cuve. Il faut se rappeler que la $BRDF-BTDF$ obtenue par correction avec le spectralon ne respecte pas l'additivité sur cette zone. Il est aussi à noter que la symétrie faite de la fonction d'appareil du spectralon pour le calcul du Q/I conduit à des erreurs importantes.

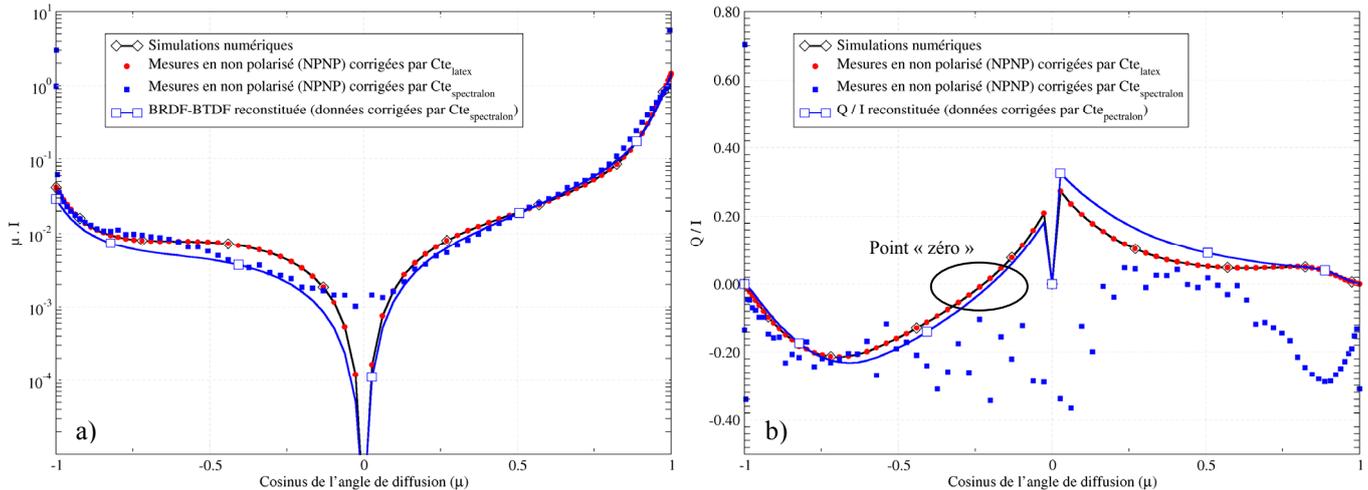


Figure 91 – Premier cas d'étude : comparaison des BRDF-BTDF et du taux de dépolariation simulés, mesurés et retrouvés après identification des paramètres.

- **Deuxième cas d'étude :**

La même démarche est effectuée sur un nouveau milieu constitué par les mêmes particules de latex. Le parcours optique de la cuve est modifié de telle sorte que la nouvelle épaisseur optique estimée soit de 2. On applique les deux jeux de constantes qui sont à notre disposition : celles définies sur un spectralon et celles déduite de la diffusion à travers une cuve plate. Nous effectuons en parallèle une mesure de l'épaisseur optique sur le moyen de mesure d'extinction. Nous obtenons : $\tau_{\text{mes}} \approx 2,1$. Les calculs théoriques sont donc effectués sur cet intervalle d'épaisseur optique et nous prendrons comme valeur moyenne « théorique » : $\tau_{\text{mes}} \approx 2,05$. Nous pouvons constater sur la Figure 92 ci-dessous une certaine sensibilité des BRDF-BTDF et du rapport Q/I issus de la modélisation à cette légère variation d'épaisseur optique.

Nous nous intéressons tout d'abord au cas des mesures normalisées par les constantes issues des cuves de latex.

L'évolution angulaire des deux premiers termes du vecteur de Stokes est représentée sur la Figure 93. Ceux-ci sont globalement comparables aux données simulées. Néanmoins, la BRDF demeure perturbée par le passage des interfaces et les hypothèses déjà évoquées lors de l'étalonnage^{[29][122]} peuvent expliquer le phénomène d'ondulation. On peut constater aussi que cette zone perturbée en BRDF correspond aussi à la dégradation de la précision sur le Q/I mesuré en réflexion. A contrario, même si la BTDF semble bien approximée dans la zone proche de la direction collimatée, l'effet sur le rapport Q/I de ces constantes inadaptées est très important.

On montre ainsi que l'application d'une fonction d'appareil déduite sur une cuve avec une certaine épaisseur optique à un jeu de données mesurées pour une autre épaisseur optique peut poser problème car les phénomènes ondulatoires semblent varier avec celle-ci, sans omettre pour autant la qualité d'alignement de la cuve.

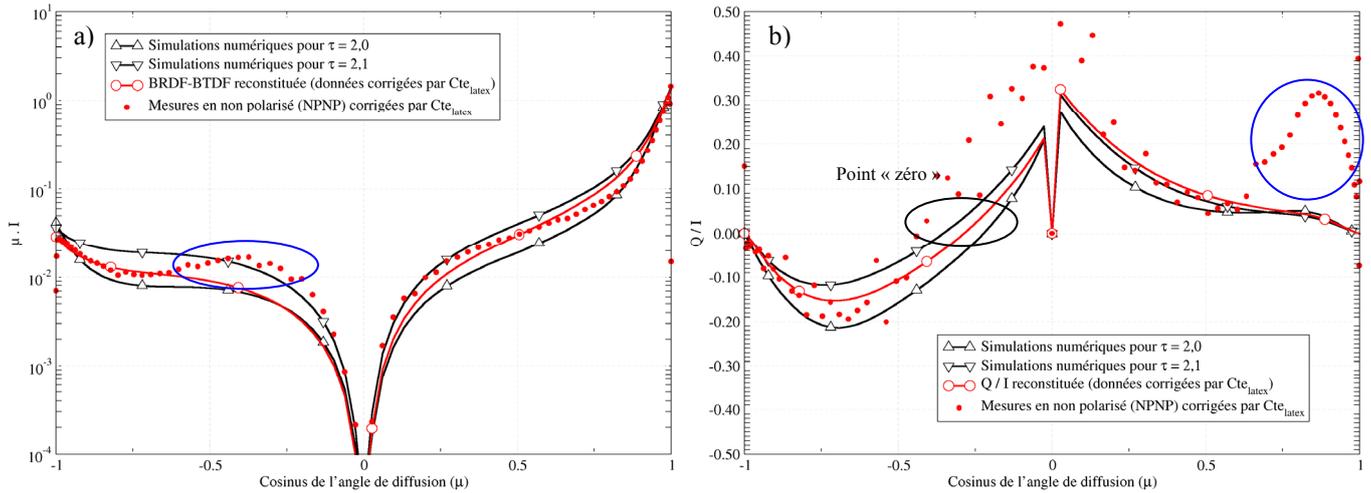


Figure 92 – Deuxième cas d'étude : comparaison des BRDF-BTDF et du taux de dépolarisation simulés, mesurés et retrouvés après identification des paramètres (cas des particules de latex + cuves plates).

Malgré les imperfections résiduelles sur les données corrigées par $Cte_{NP,p}^{latex}$ et $Cte_{NP,S}^{latex}$, nous obtenons de bons résultats (cf. Tableau 24) après optimisation. L'erreur commise sur chacun des paramètres reste inférieure à 4%.

	ω	τ	r_g
Valeur théorique	1,00	2,05	$0,96 \cdot \lambda_0$
Valeur initiale	0,80	2,50	$\lambda_0 / 2$
Valeur retrouvée	0,96	2,13	$\approx \lambda_0$
Erreur	4 %	4 %	3 %

Tableau 26 – Deuxième cas d'étude : paramètres retrouvés après optimisation à partir des données corrigées par les fonctions d'appareil liées aux particules de latex.

Ce résultat peut s'expliquer par le fait que les données mesurées Q/I en réflexion encadrent correctement le point « zéro » principalement utilisé pour déterminer l'épaisseur optique. Les valeurs erronées du taux de dépolarisation en diffusion avant sont quant à elles peu utilisées dans l'optimisation. En effet, seules celles proches de $\mu = 1$ (i.e. les moins affectées car tendant vers 0) sont utilisées pour déterminer la granulométrie.

Ce cas démontre une certaine robustesse de la méthode d'identification des paramètres à des conditions d'étalonnage imparfaites tant que celles-ci affectent peu la position moyenne du point « zéro », respectent les niveaux en BRDF-BTDF et leur évolution angulaire.

Nous nous intéressons maintenant au cas des mesures normalisées par les constantes issues du spectralon. Paradoxalement, l'application de cette normalisation donne de meilleurs résultats. Les $BRDF-BTDF$ sont bien encadrées par les valeurs théoriques, un bon accord est obtenu sur le taux de dépolarisation en réflexion (à l'exception des grands angles). Par contre, le fait d'effectuer une symétrie en transmission de la fonction d'appareil, provoque ici un décalage en niveau du rapport Q/I en transmission mais conserve l'évolution angulaire.

Cette bonne adéquation des constantes du spectralon provient probablement de mesures sur le milieu de référence qui doivent être moins affectées par des phénomènes liés à la cuve, l'épaisseur optique étant plus importante. Contrairement au premier cas, nous n'introduisons pas une correction qui n'a pas lieu d'être de ces effets.

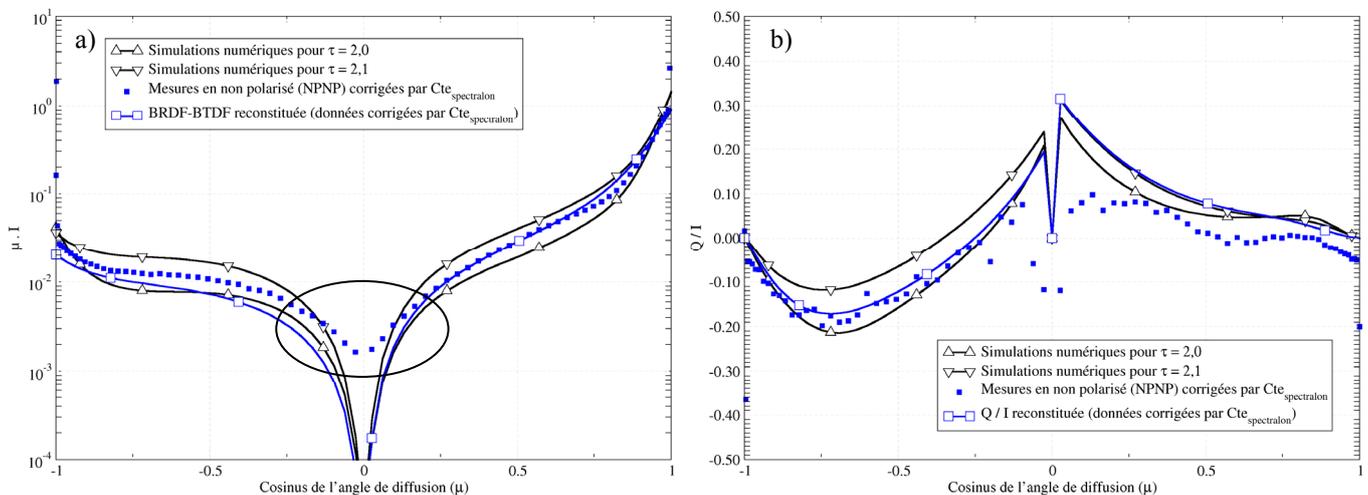


Figure 93 – Deuxième cas d'étude : comparaison des $BRDF-BTDF$ et du taux de dépolarisation simulés, mesurés et retrouvés après identification des paramètres (cas du spectralon).

Les résultats de l'optimisation sur les données corrigées par $Cte_{NP,P}^{spectralon}$ et $Cte_{NP,S}^{spectralon}$ sont présentés dans le Tableau 27 ci dessous.

	ω	τ	r_g
Valeur théorique	1,00	2,05	$0,96 \cdot \lambda_0$
Valeur initiale	0,80	2,20	$\lambda_0 / 2$
Valeur retrouvée	0,93	2,08	$0,8 \cdot \lambda_0$
Erreur	7 %	1,5 %	19 %

Tableau 27 – Deuxième cas d'étude : paramètres retrouvés après optimisation à partir des données corrigées par les fonctions d'appareil liées au spectralon.

L'erreur commise sur l'épaisseur optique est très faible. En effet, le point « zéro » et globalement le taux de dépolarisation en réflexion sont bien approchés par les mesures. On constate une dégradation sur les autres paramètres. Nous pouvons émettre l'hypothèse que l'inadéquation des constantes du spectralon à corriger les mesures de *BRDF-BTDF* aux grands angles tend à diminuer l'albédo lors de l'optimisation afin de réduire l'erreur résiduelle (voir Figure 93). Cette baisse qui est en général homothétique en niveau est alors compensée par une variation de la granulométrie pour réduire cet écart. L'estimation de ce paramètre est de plus affectée par une mauvaise estimation du taux de dépolarisation pour $\mu \approx 1$. Malgré ces différents points, la convergence globale demeure satisfaisante.

Les résultats obtenus constituent une première mise en pratique « expérimentale » de la méthode d'identification des paramètres. Dans l'ensemble, celle-ci s'avère satisfaisante et plutôt robuste aux indéterminations d'étalonnage.

En parallèle, bien qu'ayant choisi des milieux dits « de référence », les mesures sur ces derniers soulèvent la problématique de la détermination des fonctions d'appareil du système. Celles ci devront être complétées, une fois conduite la recherche et l'étude de nouveaux milieux de référence.

7 BILAN SUR LA MESURE DE LA DIFFUSION POLARISEE

Le développement d'un moyen expérimental spécifique est présenté dans ce chapitre. Plusieurs voies de mesure sont exploitées : une mesure de diffusion polarisée et une mesure d'extinction.

Pour les mesures de diffusion, l'éclairement est non polarisé ou polarisé rectilignement et une analyse en polarisation croisée est possible. Ces différentes mesures permettent de retrouver la luminance diffusée polarisée dans le plan d'incidence par un échantillon et donc, d'obtenir les données d'intérêt (*BRDF-BTDF* et taux de dépolarisation Q/I), nécessaires pour tester la méthode d'identification des paramètres proposée dans le chapitre précédent.

L'épaisseur optique est directement accessible par la mesure de l'extinction du faisceau laser transmis à travers le milieu d'intérêt. Il est donc possible de déterminer ce paramètre indépendamment des autres et de valider les valeurs retrouvées après optimisation sur les données polarisées.

Après calibrage des différents états de polarisation au travers des différents éléments optiques, un étalonnage est conduit pour déterminer d'une part, les constantes nécessaires à l'étalonnage radiométrique et d'autre part, les constantes d'appareil qui corrigent angulairement le flux collecté.

Les résultats obtenus sont cohérents bien que l'utilisation de cuves à faible épaisseur optique, la dépolarisation imparfaite du spectralon et l'absence de données équivalentes en transmission sur ce type de matériau, soulèvent certains problèmes. Ceux-ci sont certes non résolus à ce jour mais le travail présenté permet de mieux les appréhender. Il constitue une base solide dans la recherche de nouveaux matériaux « étalon de polarisation ». L'utilisation de cuves pour des épaisseurs optiques plus importantes constitue une approche facile à mettre en œuvre et qu'il sera nécessaire d'investiguer. L'apparition de nouveaux matériaux diffusants référencés en transmission (proposés par Labsphère) ouvre aussi une voie complémentaire au spectralon. Il est aussi à noter que de nombreux travaux scientifiques^[123] visent à une meilleure caractérisation polarimétrique du spectralon. L'emploi de composants optiques non diffusants (matériau opaque spéculaire, lame mince, lame de retard...) dont les matrices de Mueller sont maîtrisées peut s'avérer utile lors de l'étalonnage.

Au travers de quelques cas tests, nous vérifions le concept à la base de notre méthode d'identification des paramètres. Dans l'ensemble, les différents paramètres radiatifs (albédo, épaisseur optique et granulométrie représentant la matrice de Mueller) sont retrouvés avec une précision satisfaisante, malgré les indéterminations d'étalonnage. Ces résultats sont encourageants et montrent toutes les potentialités offertes par cette approche utilisant la polarisation.

Une fois les procédures d'étalonnage affirmées, cette méthode d'identification devra être étendue à des milieux diffusants de référence, plus denses, d'albédos différents de 1 et/ou de granulométries pouvant être polydispense. A terme, l'application à des milieux réels constitue une finalité applicative de ces travaux.

La voie de mesure en polarisation modulée présentée en Annexe de ce chapitre n'est pas encore exploitée. La détermination directe de la matrice de Mueller fait également partie des perspectives et des futures applications du banc *MELOPEE* afin d'améliorer la détermination des paramètres microphysiques (granulométrie, morphologie...).

CONCLUSION

Au cours de ces travaux, nous avons tenté d'établir l'apport de la polarisation dans les méthodes d'identification des paramètres radiatifs.

Pour y parvenir, nous avons tout d'abord développé un modèle de transfert radiatif qui résout l'ETRP 1D par une méthode d'*adding-doubling*. Cette approche facile à mettre en œuvre nécessite peu de temps de calcul et demeure numériquement stable même si le milieu traversé est optiquement épais. Elle constitue *de facto* un outil d'intérêt lors d'une démarche d'identification s'appuyant sur une optimisation récursive. En nous inspirant des travaux effectués dans le domaine atmosphérique^[19], un outil adapté à nos besoins est développé. Le changement de l'indice de réfraction du milieu hôte est tout d'abord pris en compte. Celui-ci induit des réflexions multiples dans les différentes couches du milieu, ce qui nécessite d'une part l'introduction de matrices de transfert spécifiques et d'autre part une modification du terme source dans l'ETRP. Ce dernier est aussi modifié par l'extension de la source d'éclairement à une polarisation incidente linéaire en réécrivant les vecteurs de la base de décomposition dans l'espace de Fourier. En effet, dans le domaine atmosphérique, seul un éclairage non polarisé est en général modélisé (cas du Soleil). L'ensemble du vecteur de Stokes est ensuite obtenu en résolvant l'ETRP.

Un modèle Monte Carlo est également développé. Il permet de modéliser la diffusion polarisée avec des géométries plus complexes. Cet outil de référence possède l'inconvénient de nécessiter des temps de calcul très importants mais est adaptable à diverses évolutions. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement. Dans un premier temps, nous l'utilisons ici pour valider le code 1D polarisé. Une étude comportementale en polarisation circulaire ou elliptique est ensuite conduite en utilisant cette méthode.

Une étude de sensibilité est ensuite conduite sur les données de diffusion polarisée pour déterminer les fonctions « objectifs » nécessaires à l'identification des paramètres.

Pour limiter le nombre de paramètres dans les méthodes d'identification, des fonctions modèles (type Henyey Greenstein) ou des décompositions dans la base des polynômes de Legendre associés à des troncatures sont couramment employées en transfert radiatif non polarisé. Ces approches n'apportent pas de réels avantages ici. En effet, le nombre de paramètres devient trop important si on les applique à l'ensemble de la matrice de phase. Cette pratique ne garantit pas non plus une représentation physique de la matrice de Mueller ainsi reconstituée. Nous avons choisi de générer (*i.e.* de représenter) cette matrice à chaque itération à partir d'une granulométrie sphérique équivalente modélisée par une simple loi log-normale. Une troncature est alors appliquée sur les termes de la matrice de Mueller afin de limiter si besoin le nombre de termes nécessaires.

Pour construire notre fonction « objectif », nous recherchons, au travers de l'étude de sensibilité conduite sur l'épaisseur optique, l'albédo et la granulométrie (τ , ω et r_g), des intervalles angulaires où les données polarisées diffusées sont sensibles à un paramètre et indépendantes, dans la mesure du possible, aux autres paramètres. Ainsi, le taux de dépolarisation est associé à l'épaisseur optique : le passage au « point zéro » du rapport Q/I en réflexion semble être un bon critère pour retrouver la valeur de τ . La *BRDF-BTDF* est utilisée en dehors de la normale et des grands angles de diffusion pour identifier l'albédo. On remarque que la transmission est beaucoup plus affectée par le passage d'un milieu fortement absorbant ($\omega < 1$). Enfin, comme cela était le cas en non polarisé, la granulométrie est identifiée pour des angles proches de la normale (en réflexion et en transmission). Les pentes des pics de transmission ou de rétrodiffusion fournissent l'information essentielle pour retrouver ce paramètre.

Les trois domaines angulaires ainsi définis sont indépendants les uns des autres et permettent la construction d'une fonction « coût » globale efficace, après pondération de chaque fonction affectée à un unique paramètre. Cette démarche est légèrement différente des approches conventionnelles en identification non polarisée où une unique fonction « objectif » est en général définie pour tous les paramètres à identifier. Deux fonctions « coût » sont ainsi définies et testées afin de retenir la plus efficace d'entre elles. L'approche de type « moindres carrés » donne les meilleurs résultats lorsqu'on travaille sur l'ensemble des paramètres.

Les algorithmes d'optimisation développés dans ce mémoire sont basés sur des méthodes de type quasi-Newton, bien que des outils de recuits simulés aient été testés mais non retenus au cours de cette étude : ils induisaient des temps de calculs trop longs pour notre démarche.

Dans le troisième chapitre de cette thèse, nous présentons différents cas de calculs pour tester numériquement la validité de la démarche d'identification proposée sur des données de références préalablement simulées. Cette validation complète est conduite en complexifiant progressivement le problème et en considérant de nombreux cas défavorables tels que la présence de bruit ou d'un biais volontaire sur l'un des paramètres (*i.e.* l'épaisseur optique). Le cas simplifié d'une épaisseur optique connue est aussi considéré pour pouvoir être comparé aux méthodes conventionnelles. Dans chacun de ces cas, nous avons montré que l'erreur faite sur le jeu retrouvé de paramètres était inférieure à 10%. Nous noterons néanmoins une certaine sensibilité de la méthode à la pondération appliquée lors de la construction de la fonction « coût ». Ce point pourra nécessiter des

investigations complémentaires bien que le calcul en début d'optimisation des coefficients de pondération (*i.e.* au point initial) semble dans la grande majorité des cas suffisants.

L'approche proposée sur l'identification polarisée des paramètres est ensuite validée à partir de données mesurées de diffusion polarisée. Un moyen expérimental est spécialement développé dans le cadre de cette thèse afin d'obtenir :

- la *BRDF-BTDF* non polarisée ou en polarisation croisée (pour remonter au taux de polarisation Q/I),
- l'épaisseur optique par une mesure d'extinction du flux collimaté.

Ce moyen est calibré dans un premier temps par des mesures relatives sur le vecteur de Stokes (*i.e.* l'état de la polarisation). Celui-ci est vérifié après le passage de chacune des optiques du montage et est comparé aux valeurs théoriques déduites des matrices de Mueller de chaque composant. Dans un second temps, l'étalonnage radiométrique des différentes voies de mesure est réalisé. Il s'agit de déterminer les constantes d'appareil qui corrigent la diffusion angulaire lorsque les éléments ne sont pas bien alignés sur l'axe optique. Les mesures en polarisation croisée sont corrigées puis introduites dans le modèle d'identification des paramètres développé. Les paramètres radiatifs des milieux modèles investigués (particules de latex) sont retrouvés avec une erreur inférieure à 10%. Cette erreur est principalement due au bruit de mesure généré sur le taux de dépolarisation.

Nous avons démontré l'apport de la polarisation pour étendre les méthodes d'identification des paramètres radiatifs à des milieux multi-couches en levant, en particulier, le besoin de connaître l'épaisseur optique. Le concept développé dans ce manuscrit présente de nombreuses potentialités d'extension, faciles à mettre en oeuvre, comme par exemples la prise en compte de granulométries et/ou de morphologies des diffuseurs plus complexes, ou l'extension à des milieux multi-couches. D'une manière plus générale, ces travaux nous ont permis d'appréhender l'importance de la polarisation dans l'étude des milieux diffusants denses. Des travaux complémentaires devront être effectués pour approfondir certains domaines d'études et constituent ainsi des perspectives aux travaux présentés.

- **Perspectives**

Les outils numériques que nous avons présentés pourront être complétés. Nous avons vu dans le dernier chapitre de cette thèse qu'il est important d'introduire la notion d'angles de collection en moyennant la diffusion polarisée sur un intervalle $\Delta\varphi$. Ce domaine évolue en fonction de l'angle de détection θ . Les futures simulations numériques (en 1D) tiendront compte de cette correction angulaire.

Pour l'instant, la résolution unidimensionnelle de l'ETRP s'effectue en polarisation linéaire. Son adaptation à une polarisation quelconque est indispensable si l'on souhaite étudier l'apport des polarisations circulaires ou elliptiques dans les méthodes d'optimisation. La décomposition en série de Fourier implique alors deux calculs indépendants dans les deux bases (en *cosinus* et en *sinus*) puis la sommation des luminances diffusées. En appliquant cette démarche, les temps de calculs sont augmentés mais restent raisonnables par rapport à l'approche Monte Carlo.

L'identification des paramètres sur des milieux réels (multicouches et rugueux, *i.e.* les peintures) est en cours de développement. Dans ce manuscrit, nous avons présenté des mesures et des simulations numériques de la diffusion de particules de latex dans des cuves « plates ». Le changement de l'indice de réfraction est lié au passage des interfaces planes. La prise en compte d'interfaces rugueuses sous la forme de matrices de transfert polarisées spécifiques est envisagée. L'identification des paramètres radiatifs de plusieurs couches homogènes est possible si l'itération est faite sur chaque couche indépendamment les unes des autres. Cette approche soulève néanmoins des problèmes d'unicité des solutions. L'extension de la méthode d'identification polarisée à plusieurs longueurs d'onde à partir de mesures spectrales de diffusion polarisées peut constituer une solution à ce point dur.

La méthode actuelle permet de retrouver les propriétés microphysiques équivalentes à celles de diffuseurs sphériques. Sa généralisation à des distributions polydisperses sera une priorité. En allant plus loin, l'écart à la sphéricité (*i.e.* à l'excentricité) pourra être considéré à terme comme un paramètre à part entière de l'optimisation. Les données polarisées seront une source d'information possible pour le déterminer avec une certaine précision puisqu'il intervient dans la définition de la granulométrie sphérique équivalente. L'étude de particules oblates précède la généralisation à des particules plus complexes telles que des cristaux de glace. Pour diminuer les temps de calcul lors du processus d'optimisation, la génération d'une base de matrices de Mueller sur la granulométrie et l'excentricité sera indispensable.

La diffusion polarisée temporelle est également un domaine à investiguer puisqu'elle permet d'étudier des milieux plus denses que ceux étudiés lors de ces travaux (utilisation de sources laser impulsionnelles). L'adaptation de la résolution stochastique de l'ETRP en trois dimensions constitue une voie logique pour répondre à ce besoin.

Une attention particulière devra aussi être portée sur l'adaptation de la démarche d'identification à d'autres moyens de mesure tels que le banc *REMUSA* (REflectivité MUlti Spectrale et Angulaire) de l'ONERA. En effet, ce moyen expérimental réalise la mesure des *BRDF-BTDF* polarisées (en polarisation croisée) pour diverses longueurs d'onde (0,8 ; 1,54 ; 3,39 ; 4,65 et 10,6 μm) et en trois dimensions (éclairage en $\varphi_0 = 0^\circ$ et détection dans tous les plans φ). Nous avons pu voir que la diffusion polarisée en dehors du plan d'incidence (hors incidence normale) pouvait être porteuse d'information. De même, l'extension de la démarche d'identification polarisée à plusieurs longueurs d'onde apparaît comme naturelle. L'apparition de sources laser large bande (laser OPO pour l'infrarouge ou laser fibré à supercontinuum pour le visible au proche infrarouge) constitue une opportunité à saisir.

Au-delà de la simple identification des paramètres, la caractérisation directe de la matrice de Mueller de milieux diffusants constitue aussi un prolongement naturel des travaux présentés. Pour ce faire, une quatrième voie de mesure est en cours d'élaboration sur le moyen *MELOPEE* déjà utilisé pour notre étude. Sa description complète est jointe en Annexe du chapitre correspondant. La modulation de la polarisation permet de retrouver, sous certaines hypothèses, la matrice de Mueller complète du milieu diffusant investigué à partir d'un jeu de mesures. De plus, l'incorporation sur l'axe optique d'un modulateur électro-optique peut remplacer efficacement la lame demi-onde sur les voies de mesure en polarisation croisée.

Pour les mesures de matrice de Mueller, l'utilisation de cuves cylindriques (applications pour les milieux liquides) est à envisager car ces dernières limitent les effets de dépolariation au passage des interfaces en verre. En effet, ce type de géométrie favorise la détection de rayons lumineux qui sont toujours à la normale de la face de la cuve et élimine les effets de réfraction des cuves plates. De plus, l'angle de collection reste constant sur l'ensemble du domaine angulaire. Nous avons présenté en Annexe du quatrième chapitre les premiers travaux réalisés pour adapter le modèle Monte-Carlo à une géométrie cylindrique ainsi que les cuves spécialement conçues. Elles possèdent un méplat pour éviter la focalisation du faisceau au passage de la première interface. Une étude plus approfondie doit conduire dans un premier temps à l'évaluation des nouvelles fonctions d'appareil en géométrie cylindrique.

ANNEXES DU CHAPITRE I

A. MORPHOLOGIE DES PARTICULES

Considérons par hypothèse que les particules présentes dans le milieu diffusant sont équivalentes : les formes, surface et volume sont identiques. Si ces particules ont un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation, on distinguera trois catégories de particules^[43].

Les sphéroïdes correspondent à la rotation d'une ellipse autour d'un de ses axes. La figure suivante représente les différentes formes de sphéroïdes que l'on peut obtenir : a désigne le petit axe et b le grand axe de l'ellipse. Nous nous intéresserons à ce type de particules dans nos simulations, même si certains codes (tel que *CRMIM*) permettent de modéliser des cylindres ou des particules plus complexes telles que les particules de Chebyshev (basées sur les polynômes de Chebyshev). Pour se rapprocher de solutions expérimentales (particules de latex), nous considérons dans un premier temps des particules sphériques.

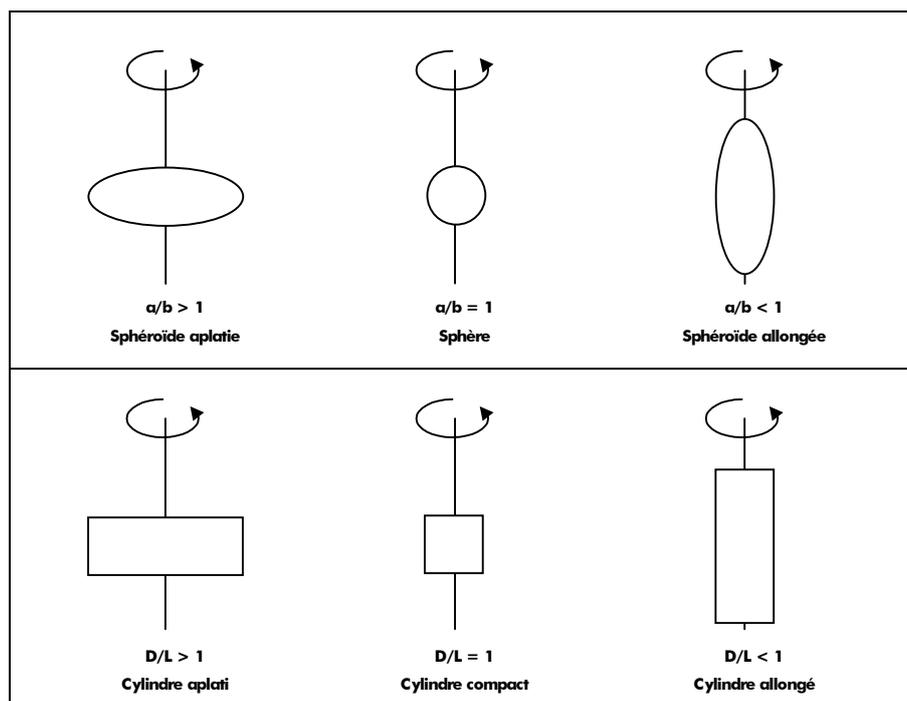


Figure 94 – Représentations de sphéroïdes et de cylindres.

B. DISTRIBUTION EN TAILLE DES PARTICULES

La distribution en taille $\rho(r)$ des particules peut être modélisée par certaines fonctions analytiques telles que la loi log-normale. On peut également en déduire les distributions surfaciques ou volumiques en multipliant $\rho(r)$ respectivement par πr^2 ou par $\frac{4}{3}\pi r^3$. Nous rappelons ci-dessous les principales fonctions qui sont exploitées dans la génération de nos milieux :

- **Distribution gamma**

$$\rho(r) = \frac{1}{ab\Gamma\left(\frac{1-2b}{b}\right)} \cdot \left(\frac{r}{ab}\right)^{(1-3b)/b} \cdot e^{-\frac{r}{ab}} \quad \text{Eq. 214}$$

- **Distribution gamma modifiée**

$$\rho(r) = \frac{\gamma}{r_c\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\gamma}\right)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{(\alpha+1)/\gamma} \cdot \left(\frac{r}{r_c}\right)^\alpha \cdot e^{-\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{r}{r_c}\right)} \quad \text{Eq. 215}$$

- **Distribution log-normale**

$$\rho(r) = N_0 \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \cdot r \cdot \ln(\sigma_g)} \cdot e^{-\frac{(\ln(r) - \ln(r_g))^2}{2 \cdot \ln^2 \sigma_g}} \quad \sigma_g > 1 \quad \text{Eq. 216}$$

... avec N_0 le nombre de particules par m^3 normalisé tel que $N_0 = \int_0^\infty \rho(r) \cdot dr$

r le rayon de la particule

r_g le rayon moyen

σ_g l'écart type

- **Distribution « en puissance »**

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{2r_1r_2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot r^{-3} \\ 0, \text{ Sinon} \end{cases}, \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad \text{Eq. 217}$$

ANNEXES DU CHAPITRE II

A. PASSAGE D'INTERFACES AVEC CHANGEMENT D'INDICE

La procédure d'*adding* permet d'ajouter des couches ayant des propriétés radiatives différentes. Lors du passage à une interface avec changement d'indice (Figure 95), la quadrature est modifiée. Les matrices de réflexion et de transmission sont calculées en introduisant les concepts d'angles réfracté (θ_0) et réfléchi (θ_1) tels que :

$$\theta_1(\lambda) = \sin^{-1} \left(\frac{n_0(\lambda)}{n_1(\lambda)} \cdot \sin \theta_0 \right) \quad \text{Eq. 218}$$

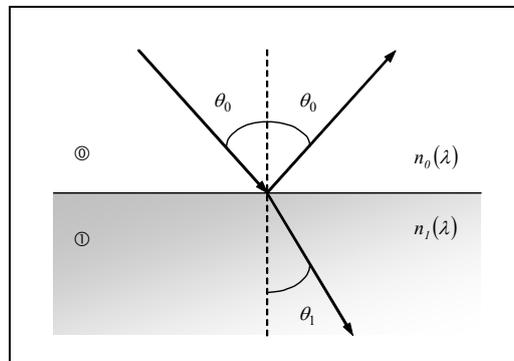


Figure 95 – Réflexion et réfraction à une interface plane.

Les coefficients de Fresnel en réflexion (r_p , r_s) et en transmission (t_p , t_s) sont donnés^[50] par :

$$\begin{aligned} r_s &= \frac{n_0(\lambda) \cdot \cos \theta_0(\lambda) - n_1(\lambda) \cdot \cos \theta_1(\lambda)}{n_0(\lambda) \cdot \cos \theta_0(\lambda) + n_1(\lambda) \cdot \cos \theta_1(\lambda)} & r_p &= \frac{n_1(\lambda) \cdot \cos \theta_0(\lambda) - n_0(\lambda) \cdot \cos \theta_1(\lambda)}{n_0(\lambda) \cdot \cos \theta_1(\lambda) + n_1(\lambda) \cdot \cos \theta_0(\lambda)} \\ t_s &= \frac{2 \cdot n_0(\lambda) \cdot \cos \theta_0(\lambda)}{n_0(\lambda) \cdot \cos \theta_0(\lambda) + n_1(\lambda) \cdot \cos \theta_1(\lambda)} & t_p &= \frac{2 \cdot n_0(\lambda) \cdot \cos \theta_0(\lambda)}{n_0(\lambda) \cdot \cos \theta_1(\lambda) + n_1(\lambda) \cdot \cos \theta_0(\lambda)} \end{aligned} \quad \text{Eq. 219}$$

En utilisant le formalisme de Stokes, la réflectivité polarisée d'une interface r_{01} se calcule à partir des équations de Snell-Descartes, des coefficients de Fresnel, des propriétés optiques des milieux et de l'angle d'incidence^[42].

$$r_{01}(\lambda, \theta_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (r_p \cdot r_p^* + r_s \cdot r_s^*) & \frac{1}{2} \cdot (r_p \cdot r_p^* - r_s \cdot r_s^*) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (r_p \cdot r_p^* - r_s \cdot r_s^*) & \frac{1}{2} \cdot (r_p \cdot r_p^* + r_s \cdot r_s^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Re(r_p \cdot r_s^*) & \Im(r_p \cdot r_s^*) \\ 0 & 0 & -\Im(r_p \cdot r_s^*) & \Re(r_p \cdot r_s^*) \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 220}$$

La matrice de transmission t_{01} pour la même interface prend en considération le changement d'angle solide et est définie par :

$$t_{01}(\lambda, \theta_0) = \frac{n_1 \cdot \cos \theta_1}{n_0 \cdot \cos \theta_0} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (t_p \cdot t_p^* + t_s \cdot t_s^*) & \frac{1}{2} \cdot (t_p \cdot t_p^* - t_s \cdot t_s^*) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (t_p \cdot t_p^* - t_s \cdot t_s^*) & \frac{1}{2} \cdot (t_p \cdot t_p^* + t_s \cdot t_s^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Re(t_p \cdot t_s^*) & \Im(t_p \cdot t_s^*) \\ 0 & 0 & -\Im(t_p \cdot t_s^*) & \Re(t_p \cdot t_s^*) \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 221}$$

Suivant la valeur des indices, il existe un angle critique θ_c où la réflexion devient totale et la transmission nulle.

Il est défini par la relation suivante :

$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{n_0}{n_1} \right) \quad \text{et} \quad \mu_c = \cos \theta_c \quad \text{Eq. 222}$$

B. QUADRATURES NUMERIQUES ET CONE DE REFRACTION

Le calcul du terme intégral de l'ETRP introduit le concept de **quadratures numériques**. L'intégrale générique

$\int_{4\pi} f(\Omega) \cdot d\Omega$ se réécrit sous la forme $\int_{\mu=-1}^{\mu=1} f(\mu) \cdot d\mu$. Les directions de diffusion (μ_i) et leurs poids associés (ρ_i) sont donnés^[67] dans le milieu par une quadrature de type Gauss^[30] de degré N :

$$\int_{\mu=-1}^{\mu=1} f(\mu) \cdot d\mu = \sum_{i=-N}^N \rho_i \cdot f(\mu_i) = \sum_{i=1}^N \rho_i \cdot (f(\mu_i) + f(-\mu_i)) \quad \text{Eq. 223}$$

Les directions sont les racines du polynôme de Legendre $P_{2N}(\mu_i)$ de degré $2N$. Pour rendre accessible les directions particulières $\mu = \pm 1$, on modifie ces polynômes tels que $Q_{2N} = (1 - \mu^2) \cdot P_{2(N-1)}(\mu)$. A l'intérieur du milieu, l'angle θ_c définit le cône de réfraction représenté sur la Figure 96.

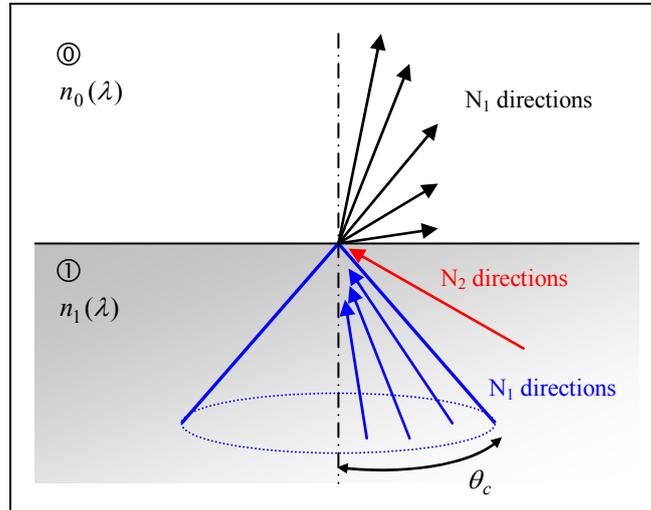


Figure 96 – Présence du cône de réfraction au passage d'une interface.

La distribution angulaire est calculée en deux parties : une quadrature de degré N_1 à l'intérieur du cône et une quadrature de degré N_2 à l'extérieur du cône. L'expression suivante est vérifiée pour ces deux quadratures :

$$\frac{\mu_c}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{\mu_c}{2}u + \frac{\mu_c}{2}\right) \cdot du = \sum_{i=1}^{N_1/2} a_i \cdot (f(u_i) + f(-u_i)) \quad \text{Eq. 224}$$

$$\frac{1-\mu_c}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{1-\mu_c}{2}v + \frac{1-\mu_c}{2}\right) \cdot dv = \sum_{i=1}^{N_2/2} b_i \cdot (f(v_i) + f(-v_i))$$

Avec les directions u_i et v_i définies par :

$$u_i \text{ telle que } Q_{N_1}(u_i) = 0 \quad \forall i \in [1, N_1] \quad \text{Eq. 225}$$

$$v_i \text{ telle que } Q_{N_2}(v_i) = 0 \quad \forall i \in [1, N_2]$$

Si $P'_{2N}(\mu_i) = \frac{dP_{2N}}{d\mu}(\mu_i)$, les poids associés aux directions u_i et v_i s'écrivent :

$$a_i = \frac{1}{P'_{N_1}(u_i)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{P_{N_1}(\mu)}{(\mu - u_i)} \cdot d\mu \quad \text{et} \quad b_i = \frac{1}{P'_{N_2}(v_i)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{P_{N_2}(\mu)}{(\mu - v_i)} \cdot d\mu \quad \text{Eq. 226}$$

Pour calculer la quadrature de degré $N_1 + N_2$ à l'intérieur du milieu, on applique le changement de variables suivant sur les directions et les poids correspondants :

$$\text{Dans le cône} \quad \mu_i = \frac{\mu_c}{2} + u_i \frac{\mu_c}{2} \quad \text{et} \quad \rho_i = a_i \cdot \frac{\mu_c}{2} \quad \forall i \in [1, N_1] \quad \text{Eq. 227}$$

$$\text{Hors du cône} \quad \mu_i = \frac{1 + \mu_c}{2} + v_{i-N_1} \frac{1 - \mu_c}{2} \quad \text{et} \quad \rho_i = b_{i-N_1} \cdot \frac{1 - \mu_c}{2} \quad \forall i \in [N_1 + 1, N_1 + N_2]$$

Les fonctions de phase étant normalisées, les poids de Gauss doivent vérifier l'Eq. 228 en symétrie azimutale. Ces relations qualifiées de « moments » valident les lois de conservation d'énergie.

$$\begin{aligned} \text{Ordre 0} & \quad \sum_{i=-N}^N \rho_i = 2 \\ \text{Ordre 1} & \quad \sum_{i=-N}^N \rho_i \cdot \mu_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \rho_i \cdot \mu_i = \frac{1}{2} \\ \text{Ordre 2} & \quad \sum_{i=-N}^N \rho_i \cdot \mu_i^2 = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \text{Eq. 228}$$

Au passage des interfaces, la quadrature décrite ci-dessus doit être adaptée : seuls les angles contenus dans le cône de réfraction (notés $\mu_{i,1}$) seront transmis vers l'extérieur. Les directions $\mu_{i,0}$ se déduisent des relations de Snell-Descartes. Les poids $\rho_{i,ext}$ correspondants sont également calculés.

$$\mu_{i,0} = \cos \left[\sin^{-1} \left(\frac{n_1(\lambda)}{n_0(\lambda)} \cdot \sin(\cos^{-1} \mu_{i,1}) \right) \right] \quad \text{et} \quad \rho_{i,1} = \mu_{i-1,0} - \mu_{i,0} \quad \text{Eq. 229}$$

... avec

$$\begin{aligned} \text{pour } i = 1 & \quad \mu_{i,1} = 1 - \rho_{1,1} \quad \text{et} \quad \rho_{i,0} = 1 - \mu_{1,0} \\ \text{pour } i \in [2, N_1] & \quad \mu_{i,1} = \mu_{i-1,1} - \rho_{i,1} \end{aligned}$$

ANNEXES DU CHAPITRE IV

A. COMPLEMENTS SUR LA PRESENTATION GENERALE DU BANC *MELOPEE*

Cette annexe complète les renseignements fournis lors de la présentation générale du banc de mesure *MELOPEE*.

- **Source laser**

Les caractéristiques de la source laser continue (laser *Millennia XsJ*) sont regroupées dans le Tableau 28. Par hypothèse, on suppose qu'il n'y a pas redistribution de la fréquence afin de travailler à longueur d'onde fixée.

Puissance maximale	Longueur d'onde	Mode spatial	Diamètre du faisceau	Divergence	Polarisation
> 10 W continu	532 nm	TEM ₀₀ Ellipsité < 10 %	2,3 mm ± 10 % à 1/e ²	< 0,5 mrad ± 10 %	> 100:1 vertical

Tableau 28 – Principales caractéristiques du laser Nd:Yag (données constructeur).

- **Composants optiques**

Le laser utilisé offre la possibilité de travailler avec de fortes puissances lumineuses (jusqu'à 10 W continu) qui sont indispensables pour étudier des milieux optiquement épais ou absorbants. Les éléments utilisés dans la chaîne optique sont donc adaptés à ces densités. A 532 nm et pour une incidence à 45°, les **miroirs** de renvoi ont tous une réflectance de 93% en polarisation *P* et 94% en polarisation *S*. Lors de l'étalonnage des voies de mesure, l'état de la polarisation est vérifié après le passage de chacun des miroirs présents sur le parcours optique. L'alignement des miroirs est réalisé par retour confondu du faisceau.

L'alignement des axes de polarisation de la lame demi-onde et des polariseurs utilise la notion d'extinction ou de polarisation croisée. Le faisceau incident (faible puissance < 200 mW) est polarisé verticalement (notation P) par un polariseur de type Glan-Thompson dont l'axe de polarisation est défini par l'orientation des mailles élémentaires du cristal. Un puissance-mètre est placé après la lame demi-onde. Par rotation de cette lame autour de son axe optique, le signal détecté passe par des maxima et des minima tels que :

- un minimum de signal correspond à une orientation de la lame selon l'axe \vec{u}_S ,
- un maximum de signal correspond à une orientation de la lame selon l'axe \vec{u}_P .

• Compléments sur les polariseurs utilisés

Les polariseurs dichroïques utilisés sont de type *Melles Griot 03FPG-001*. Le rapport entre le flux transmis et le flux non polarisé arrivant sur la face d'entrée du composant est égal à 32% selon le fabricant. Dans notre cas, nous avons vérifié ce pourcentage pour un éclairage non polarisé et pour les deux polariseurs placés devant le détecteur. Pour le polariseur orienté en P , la transmission est de 29% à 532 nm. Réciproquement, pour le deuxième polariseur orienté en S , on mesure une transmission de 34%. En moyenne, on retrouve bien les données annoncées par *Melles Griot*. La Figure 97 représente cette évolution en termes de densité optique. Ce taux de transmission descend à 20% lorsqu'on traverse successivement deux polariseurs orientés selon le même axe optique.

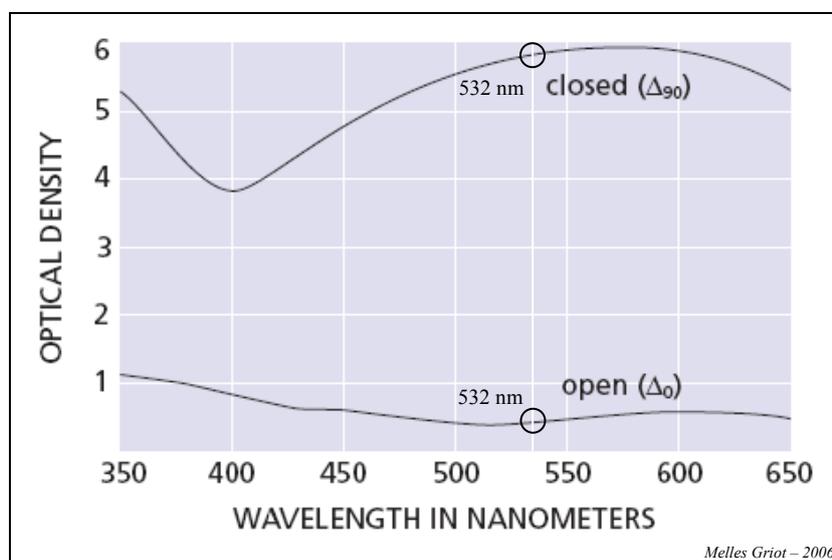


Figure 97 – Evolution du taux de transmission des polariseurs en fonction de la longueur d'onde.

La Figure 98 est une reproduction de la notice fournie et qui établit les relations et les notations employées pour retrouver les grandeurs précitées en polarisation croisée.

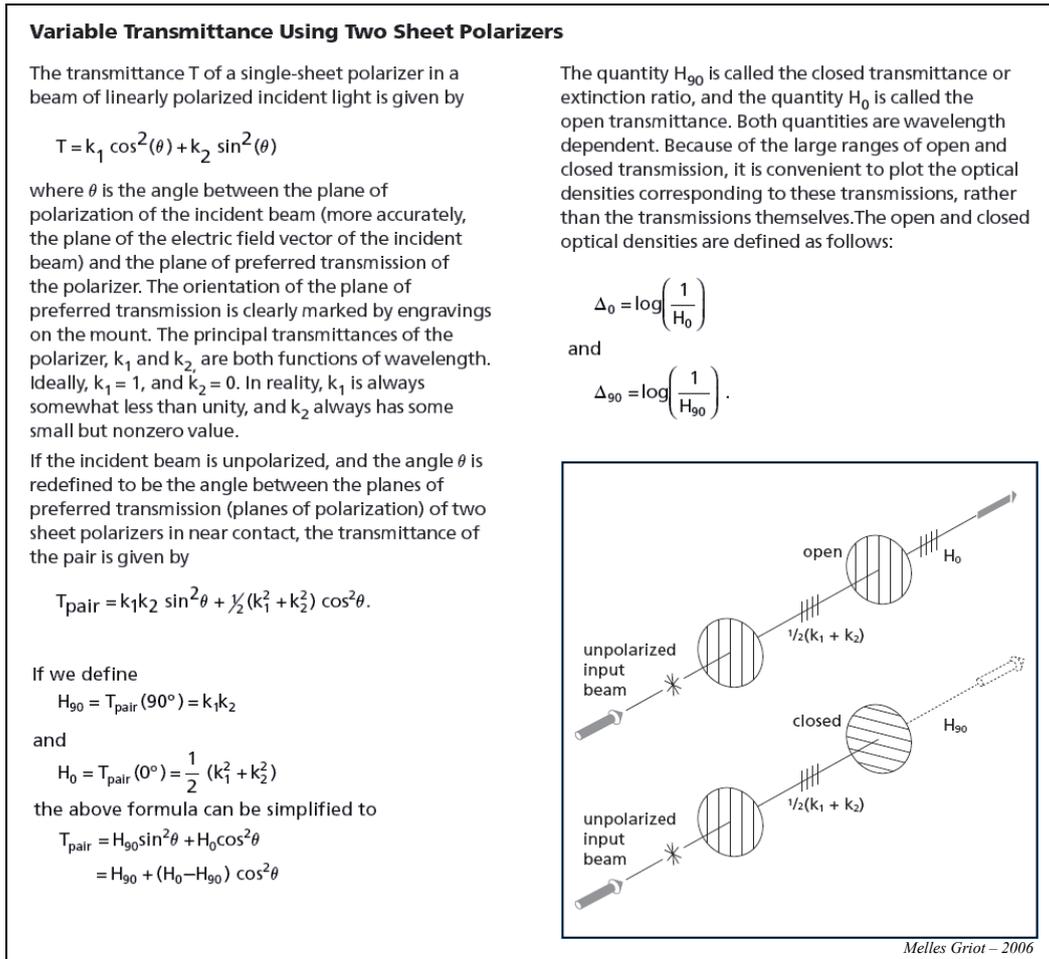


Figure 98 – Relations de transmission en polarisation croisée.

En polarisation croisée (utilisation de deux polariseurs orientés à 45° l'un de l'autre), le taux d'extinction est estimé à 10⁻⁴ dans le visible. Lorsque l'éclairement incident est polarisé en *P* ou en *S* et que l'on place le deuxième polariseur tel qu'il y ait extinction (réciproquement en *S* et *P*), un résidu du signal contribue au flux détecté.

• **Cuves à circulation**

Les dimensions des cuves « plates » en quartz réalisées spécialement pour cette étude sont présentées dans le Tableau 29. Les différentes valeurs du parcours optique permettent d'obtenir différentes épaisseurs optiques tout en respectant l'hypothèse de diffusion indépendante (*i.e.* de concentration volumique C_V faible).

Référence de la cuve	HELLMA 130-245QS	HELLMA 130-288QS 2	HELLMA 130-288QS 6	HELLMA 121-000QS
Parcours optique e	5 mm	200 μm	2 mm	200 μm
Cuve à circulation	oui	oui	oui	Non

Tableau 29 – Caractéristiques principales des cuves à faces parallèles.

L'alignement des cuves sur l'axe optique est effectué par retour confondu dans le même plan φ que le faisceau incident : l'échantillon doit être éclairé à la normale de sa face d'entrée pour éviter les réflexions multiples et la modification du vecteur de Stokes au passage de la première interface.

• Optiques de détection

Pour collecter suffisamment de flux avec une bonne résolution angulaire, on utilise une lentille convergente de focale $f = 150$ mm avant le système de détection. Les caractéristiques de ce montage sont présentées dans le Tableau 30. La discrétisation angulaire se limite aux demi-angles de collection *i.e.* à $\Delta\theta = 1,05^\circ$.

Focale	Diamètre	Distance échantillon-lentille	Grandissement transversal	Demi-angle de collection
150 mm	25,4 mm	658 mm	-0,3	1,05°

Tableau 30 – Caractéristiques de la lentille et de son montage.

Le demi-angle de collection est vérifié expérimentalement : un miroir dont la normale est orientée à 10° par rapport au faisceau laser incident remplace l'échantillon. Le balayage angulaire du détecteur autour du rayon réfléchi permet de tracer la courbe d'intensité de la Figure 99.

On vérifie aussi la position du centre de rotation : le maximum de signal est obtenu pour un angle de réflexion égal à 20° . La largeur à mi-hauteur définit la dimension de l'angle de collection du système de détection lorsqu'on utilise la lentille de focale $f = 150$ mm. Expérimentalement, cet angle correspond à la valeur définie dans le Tableau 30 et est de l'ordre de 1° .

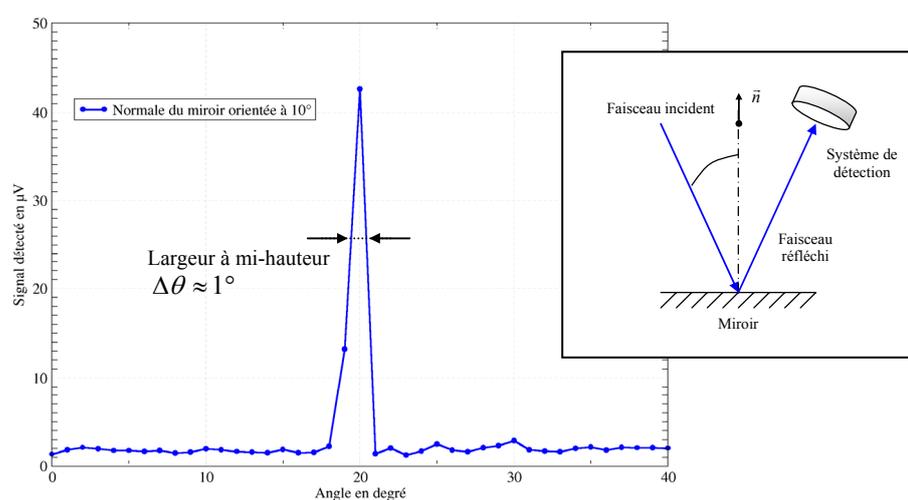


Figure 99 – Vérification expérimentale de la valeur de l'angle de collection.

L'alignement de tous ces composants est effectué dans l'axe optique du faisceau laser afin d'obtenir un maximum (ou un minimum) de signal sur le détecteur.

- **Electronique de détection**

Le détecteur *Hinds DET-90* est spécialement dédié par son concepteur pour les expériences où la polarisation est modulée. Ses caractéristiques sont regroupées dans le Tableau 31. Un filtre interférentiel centré sur la longueur d'onde du laser (532 nm) est placé devant la face d'entrée du détecteur.

Type de détecteur	Domaine spectral	Surface active	Réponse en fréquence
Si-PC PC = Photoconductive	350 à 950 nm	20 mm ²	DC – 500 kHz

Tableau 31 – Caractéristiques du détecteur DET-90.

Seule la diffusion en champ lointain est prise en compte. Si on considère un milieu optiquement mince, la lumière diffusée par diffusion simple garde sa cohérence. Pour s'affranchir de cette cohérence lorsqu'on étudie des milieux non denses, le temps d'intégration du détecteur est réglé sur une durée suffisamment longue et les mesures sont moyennées sur un grand nombre de particules. L'intensité totale reçue par le détecteur (non polarisé) sera la somme des intensités diffusées par $N_{particules}$ présentes dans le milieu.

- **Détermination de la surface imagée**

La surface active observée est proportionnelle à la surface active du détecteur et au grandissement transversal G_t déjà défini précédemment. La zone active du détecteur ($\overline{A_i B_i}$) est donnée par un carré de côté égal à 4,5 mm. L'objet observé aura alors une dimension telle que :

$$\overline{A_o B_o} = \frac{\overline{A_i B_i}}{G_t} \approx 15 \text{ mm} \quad \text{Eq. 230}$$

La surface active sera donc d'environ 225 mm².

- **Linéarité du détecteur (calibrage)**

Nous cherchons à vérifier si l'intensité mesurée par le système de détection suit un comportement linéaire en fonction de la puissance du laser. L'échantillon est remplacé par une densité neutre qui permet d'atténuer le signal : les mesures sont faites en transmission ($\mu = 1$) et ne doivent pas saturer le capteur photovoltaïque. La Figure 100 présente deux résultats expérimentaux. Le premier est obtenu avec une faible densité ($D = 1$) : la modification du gain permet de s'affranchir de la saturation du détecteur (proche de 10V). La deuxième courbe est donnée pour une densité plus importante *i.e.* pour $D = 3$. Pour les fortes puissances, la dispersion des points de mesures est à rapprocher d'un bruit thermique (*cf.* Figure 100b) qui est inférieur à 5%. Pour des densités de puissances supérieures à 35 mW, le faisceau laser introduit une élévation thermique du capteur et un déplacement supplémentaire d'électrons. Ce phénomène n'apparaît que lorsque le faisceau laser illumine complètement la surface du détecteur. Cette première approche expérimentale permet de relier la valeur de la tension détectée à la puissance effectivement reçue par le détecteur : le comportement du détecteur est linéaire sur un large domaine de puissances (adaptation du gain nécessaire).

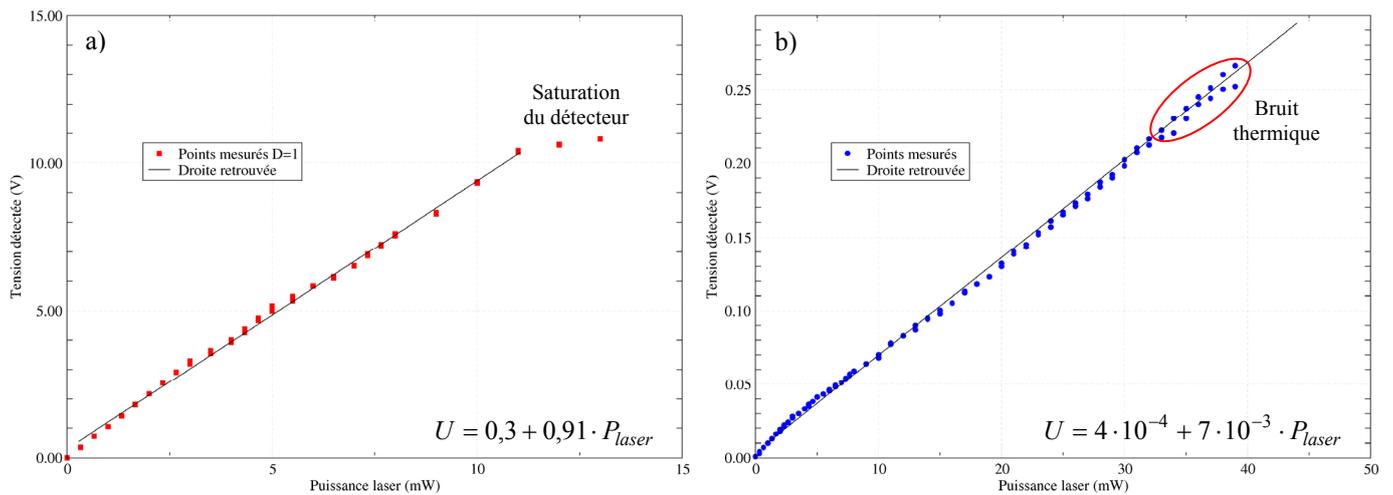


Figure 100 – Linéarité de la réponse du détecteur en fonction de la puissance du laser avec a) $D = 1$ et b) $D = 3$.

L'*offset* du détecteur et de l'UDS sont réglés à zéro. Le détecteur est directement relié à un multimètre pour régler son *offset* à zéro dans l'obscurité : le signal en sortie doit être nul. L'UDS possède deux modes de fonctionnement. Le mode *input* fait varier le gain de la composante continue indépendamment de la composante alternative. Le mode *stage 1* multiplie ces deux gains mais ne sera pas utilisé ici car il ne permet pas un réglage fin de l'UDS. L'*offset* de la composante alternative est mis à zéro en l'absence du détecteur aux bornes de l'unité. Pour la composante continue, on modifie l'*offset* en présence du détecteur dans l'obscurité. Les deux signaux sont ensuite transmis à la détection synchrone.

- **Étalonnage radiométrique**

Après le passage des différentes optiques, la puissance du laser (P_{laser}) est atténuée. Ainsi, la puissance incidente sur l'échantillon (P_{inc}^X) correspond au produit de P_{laser} par les transmittances des polariseurs et de la lame demi-onde placés en sortie du laser. La transmission notée T_{inc}^X avec $X = \{NP, P, S\}$ vérifie l'équation suivante :

$$P_{inc}^X = T_{inc}^X \cdot P_{laser} \quad \text{Eq. 231}$$

Expérimentalement, nous avons déterminé les valeurs de T_{inc}^X avec un mesureur de puissance étalonné (modèle Newport 1825-C et détecteur 818-ST). L'expérience est conduite avec $P_{laser} = 400$ mW. Avec des polariseurs de type Glan-Thompson, la moitié du signal est transmis selon un axe de polarisation (ici \vec{u}_P). Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Voie de mesure	Transmittance mesurée
Voie non polarisée (NP) Aucun élément optique	$T_{inc}^{NP} \approx 1$
Voie polarisée (P) Polariseur type glan-thompson	$T_{inc}^P = 0,50$
Voie polarisée (S) Polariseur type glan-thompson et lame $\lambda/2$	$T_{inc}^S = 0,49$

Tableau 32 – Influence des optiques sur la puissance laser (avant l'échantillon).

Après diffusion par le milieu, les photons sont collectés sur le détecteur *via* le système d'acquisition. Le flux diffusé F_{det}^Y est modifié par les transmittances des polariseurs et des optiques qui sont situés avant le détecteur. Ainsi, le flux collecté s'écrit :

$$F_{col}^Y = T_{det}^Y \cdot F_{det}^Y \quad \text{Eq. 232}$$

D'après la présentation faite en début de cette annexe, pour le polariseur orienté en P , la transmission est de 29% à 532 nm. Réciproquement, pour le deuxième polariseur orienté en S , on mesure une transmission de 34%. En moyenne, on retrouve bien les données annoncées par *Melles Griot* (32%).

La détection synchrone mesure une tension [V] aux bornes du détecteur. En remplaçant le détecteur par le mesureur de puissance étalonné, on en déduit la constante K qui relie le signal mesuré par la détection synchrone S_{mes}^Y au flux collecté F_{col}^Y avec $Y = \{NP, P, S\}$. Cette constante tient compte du gain de l'UDS et de celui la détection synchrone.

$$S_{mes}^Y = K \cdot F_{col}^Y \quad \text{Eq. 233}$$

B. COMPLEMENTS SUR LA MESURE D'EXTINCTION (LIMITES DE LA METHODE)

Le rapport P_c/P_d est une mesure de l'efficacité de la transmission du faisceau collimaté. Cette condition est vérifiée lorsque $P_c/P_d > 10$. D'après les caractéristiques du système de filtrage, elle reste valable tant que $\tau < 16$. La Figure suivante représente l'évolution de ce rapport en fonction de l'épaisseur optique.

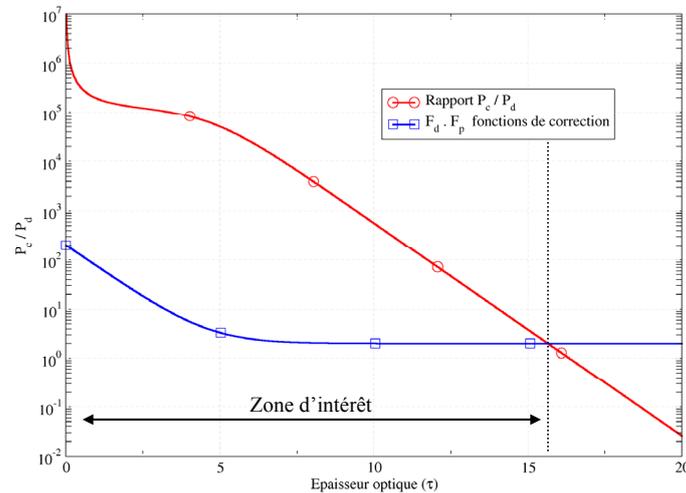


Figure 101 – Représentation des fonctions de correction et du rapport entre les puissances collimatée et diffusée.

Les caractéristiques de la chaîne de mesure sont données dans le Tableau 33 et servent à calculer le rapport signal à bruit. Ce rapport doit rester favorable, même pour de fortes épaisseurs optiques ($\tau \approx 16$ par exemple).

Transmission du système	Efficacité du détecteur	Gain	Puissance du laser	Bruit pour le gain
0,25	0,35 A/W	10^6 V/A	1 W	2 mV

Tableau 33 – Caractéristiques du système de mesure.

Sur la Figure suivante, on constate que le rapport signal à bruit est supérieur à 10 pour des épaisseurs optiques appartenant au domaine défini précédemment *i.e.* $\tau < 16$.

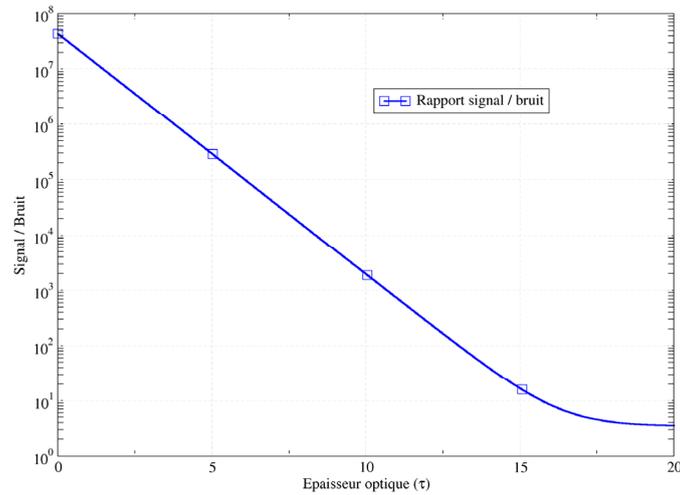


Figure 102 – Représentation du rapport entre le signal mesuré et le bruit.

L'erreur relative sur l'épaisseur optique est calculée en tenant compte du flux diffusé et du bruit de mesure. Elle fait intervenir la puissance équivalente de bruit P_b qui se déduit du Tableau 33 : $P_b = 2,3 \cdot 10^{-8}$ W. Dans la formulation de cette erreur relative, le facteur 2,58 représente un intervalle de confiance de 99 % :

$$\frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\tau + \ln(P_c + P_d + 2,58 \cdot P_b)}{\tau} \quad \text{Eq. 234}$$

Sur la Figure 103, l'erreur relative théorique est obtenue en fonction de l'épaisseur optique du milieu. Elle est inférieure à 1 % lorsque $\tau < 14$. Considérant cette limite comme une limite raisonnable en termes de précision sur les phénomènes à observer, le banc *MELOPEE* est adapté pour la mesure d'épaisseurs optiques inférieures à 14.

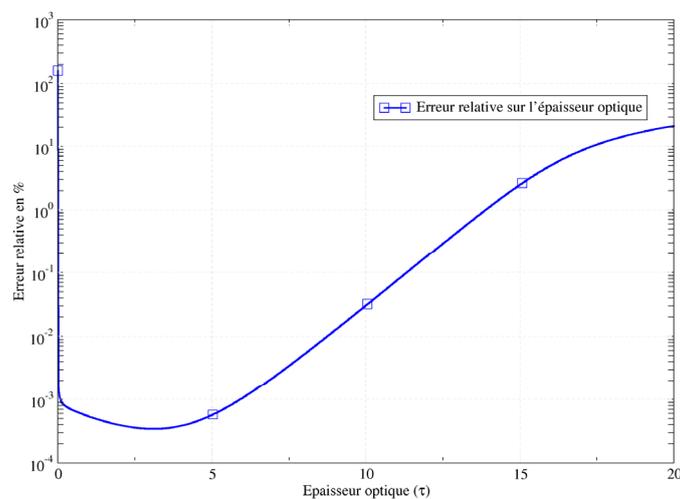


Figure 103 – Erreur relative sur l'épaisseur optique mesurée.

C. PERSPECTIVES D'ÉVOLUTION DU BANC DE MESURE

Deux perspectives d'évolution des mesures sont présentées ici. La première concerne l'utilisation de cuves cylindriques pour limiter les effets de dépolarisation au passage des interfaces. Cette nouvelle géométrie de cuves est prise en compte dans le code Monte-Carlo 3D. La deuxième partie de cette annexe présente la dernière voie ajoutée au banc *MELOPEE* et qui permet de travailler en modulation de polarisation. L'objectif de ce nouveau moyen est de déterminer la matrice de Mueller d'un milieu diffusant (en diffusion simple) et d'analyser la contribution de l'écart à la sphéricité des diffuseurs sur la détermination des paramètres radiatifs.

C1. CODE MONTE CARLO 3D EN GEOMETRIE CYLINDRIQUE

La géométrie cartésienne développée jusqu'à présent est utilisée pour valider le code *METROPOL* dans le cas simple d'une géométrie 1D. Les codes Monte Carlo sont principalement utilisés pour générer des données de référence lorsque la géométrie est plus complexe. Le moyen expérimental d'étude de milieux diffusants en optique polarisée (banc *MELOPEE*) a déjà été présenté. Pour limiter les effets de dépolarisation liés au passage des interfaces, nous étudions les milieux en solution aqueuse dans des cuves cylindriques en quartz. Le faisceau incident et le détecteur sont constamment à la normale de la cuve. La modélisation de la fonction d'appareil de ce type de montage nécessite le passage du code *MC3D* en géométrie cylindrique. Une attention toute particulière sera portée à la modélisation de la cuve.

- **Définition des coordonnées cylindriques**

La cuve cylindrique est représentée dans un repère absolu $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ similaire au cas précédent (cf. Figure 104a) et dont l'origine O est située au centre de la cuve. La luminance incidente est définie par rapport à ce repère : son vecteur de propagation incident \vec{k}_0 est orienté selon l'axe des X .

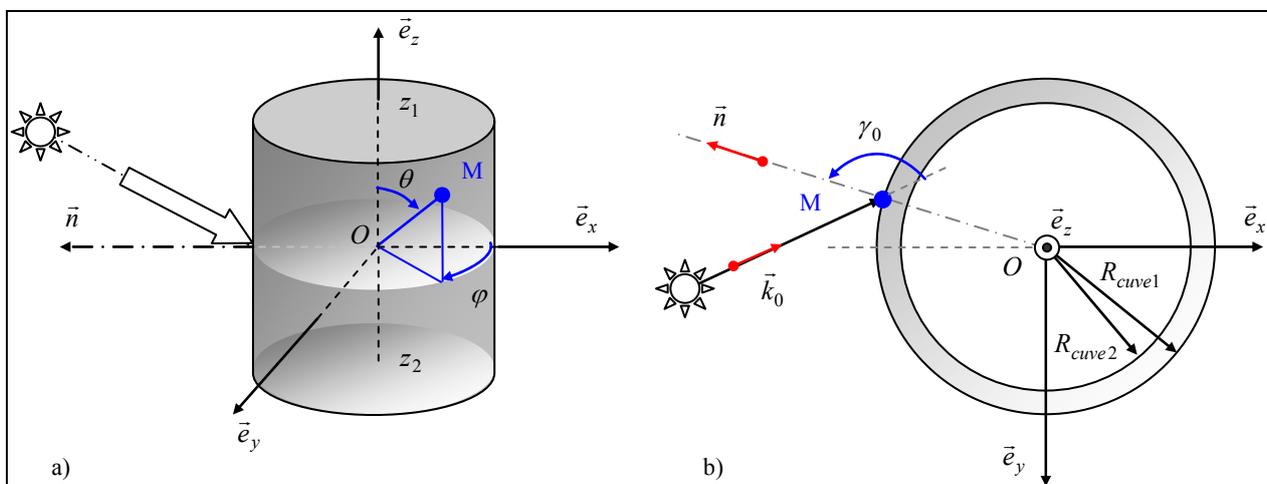


Figure 104 – (a) Représentation de la cuve cylindrique dans le repère absolu $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et (b) vue en coupe.

Les angles θ et φ sont respectivement l'angle zénithal et l'angle azimutal dans le repère absolu. Ils sont utilisés pour représenter les vecteurs de propagation des photons dans le milieu diffusant. Tout point $\vec{M}(x_M, y_M, z_M)$ de l'espace est représenté par les coordonnées suivantes :

$$\vec{M} \begin{cases} x_M = \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y_M = \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z_M = \cos \theta \end{cases} \quad \text{Eq. 235}$$

Nous définissons également un repère local lié au point \vec{M} sur une interface, à la normale \vec{n} et au vecteur propagation incident \vec{k}_0 . Les angles notés γ_i permettront de représenter les vecteurs transmis ou réfléchis définis par rapport à \vec{n} .

- **Algorithme du code Monte Carlo 3D en géométrie cylindrique**

L'algorithme est sensiblement différent par rapport au cas de la géométrie cartésienne. Il est adapté à l'étude de milieux diffusants placés dans une cuve cylindrique à circulation. Nous présentons l'enchaînement des événements pour ce cas particulier sur la figure suivante.

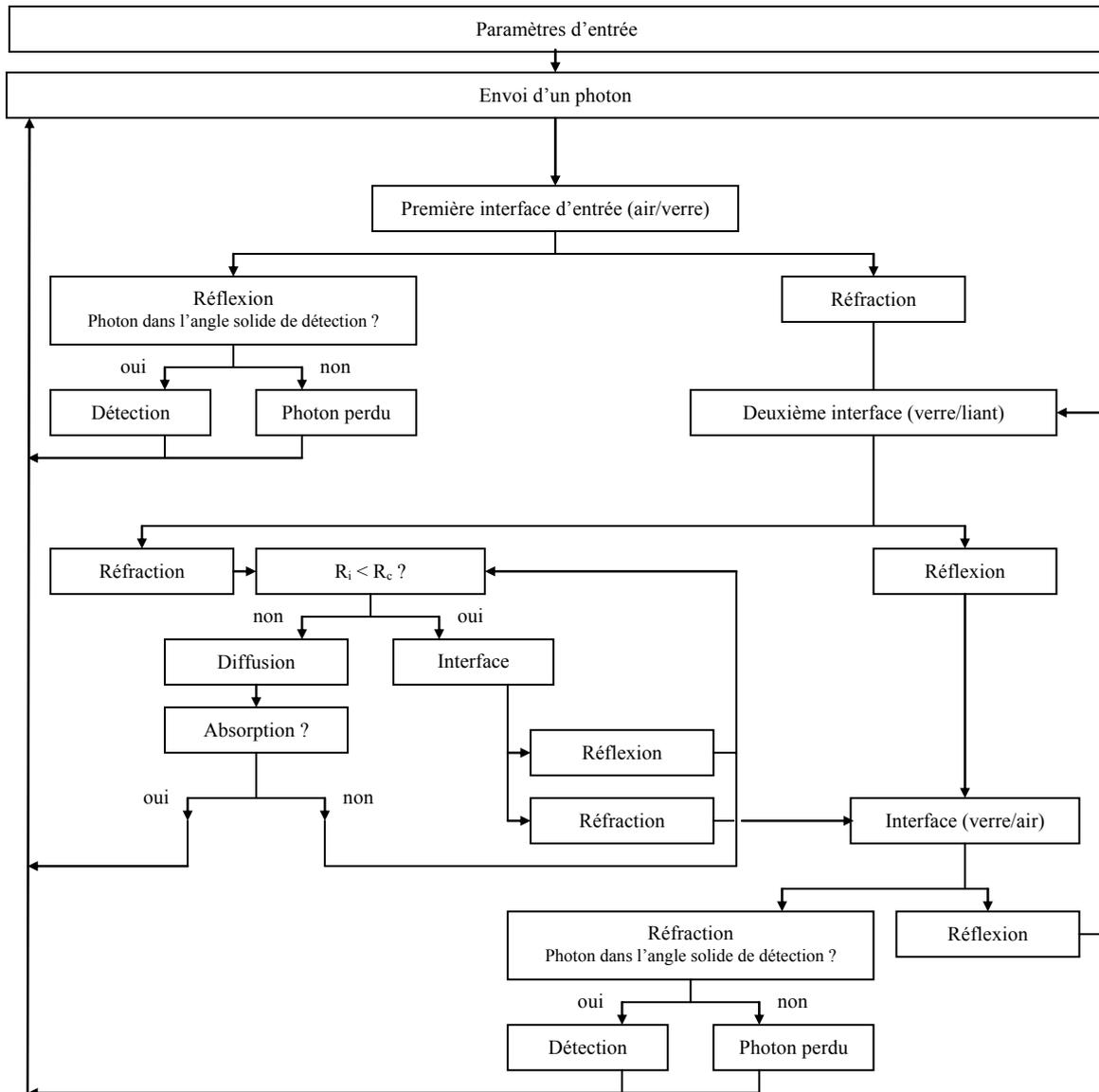


Figure 105 – Schéma de principe du code Monte Carlo 3D en géométrie cylindrique.

Cas simplifié d'une cuve entourant un milieu diffusant homogène, avec une seule couche interne.

• Rencontre avec une interface

Le traitement des interfaces (localement planes) diffère du cas précédent. A chaque photon incident, on associe le vecteur de propagation \vec{k} . La distance R_i de la plus proche interface est calculée à partir des coordonnées du point d'intersection ($\vec{M}_{\text{interface}}$) de \vec{k} avec une interface. Considérons la géométrie définie sur la Figure 106. La direction de la droite (Δ_M) passant par les deux points \vec{M} et $\vec{M}_{\text{interface}}$ est donnée par le vecteur \vec{k} . Dans le plan $(\vec{e}_x, 0, \vec{e}_y)$, son équation s'écrit sous la forme $y = a \cdot x + b$ où b correspond à l'ordonnée du point initial M et où $a = \tan \beta$. L'angle β est obtenu en effectuant le produit scalaire de \vec{e}_x par \vec{k} . Les coordonnées du point d'intersection entre la droite (Δ_M) et le cercle (ζ) de rayon R_{cuve} sont décrites par l'Eq. 236.

$$\vec{M}_{\text{interface}} = \begin{cases} x_{\text{interface}} = \frac{-a \cdot b \cdot \sqrt{\Delta}}{1 + a^2} \\ y_{\text{interface}} = a \cdot x_{\text{interface}} + b \\ z_{\text{interface}} \end{cases} \quad \text{Eq. 236}$$

avec $\Delta = (2 \cdot a \cdot b)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot (b^2 - R_{\text{cuve}}^2)$.

Le calcul de $z_{\text{interface}} = \bar{z} + d\bar{z}$ (distances algébriques définies sur la Figure 106b) nécessite la détermination préalable de la distance R_i entre le point initial $\vec{M}(x, y, z)$ et le point $\vec{M}_{\text{interface}}$. Cette distance est indépendante de la variable z :

$$R_i = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}\right) \cdot \left((x_{\text{interface}} - x)^2 + (y_{\text{interface}} - y)^2\right)} \quad \text{avec} \quad \theta \neq \{0, \pi/2\} [\pi] \quad \text{Eq. 237}$$

Si $\theta = 0[\pi]$, la distance R_i est donnée par la relation $R_i = \frac{H}{2} \pm z$ où $H = z_1 - z_2$ est la hauteur de la cuve cylindrique. Si $\theta = \pi/2[\pi]$, la distance à la plus proche interface s'écrit $R_i = \sqrt{(x_{\text{interface}} - x)^2 + (y_{\text{interface}} - y)^2}$.

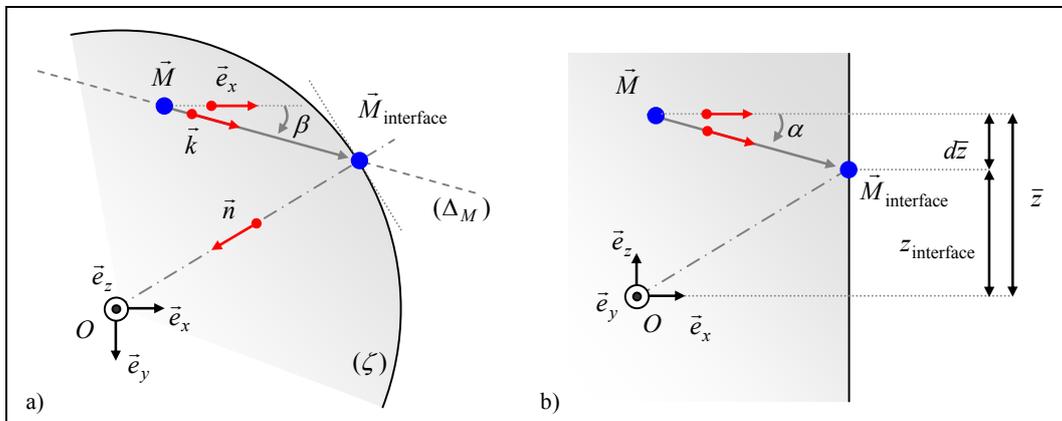


Figure 106 – Géométrie utilisée pour calculer les coordonnées de $\vec{M}_{\text{interface}}$.

Projections (a) dans le plan $(\vec{e}_x, 0, \vec{e}_y)$ et (b) dans le plan $(\vec{e}_x, 0, \vec{e}_z)$.

Il est nécessaire d'introduire un deuxième repère local. L'angle zénithal θ est toujours déterminé par rapport au vecteur unitaire \vec{e}_z . Il reste identique dans le repère local et dans le repère global (cf. Figure 107a).

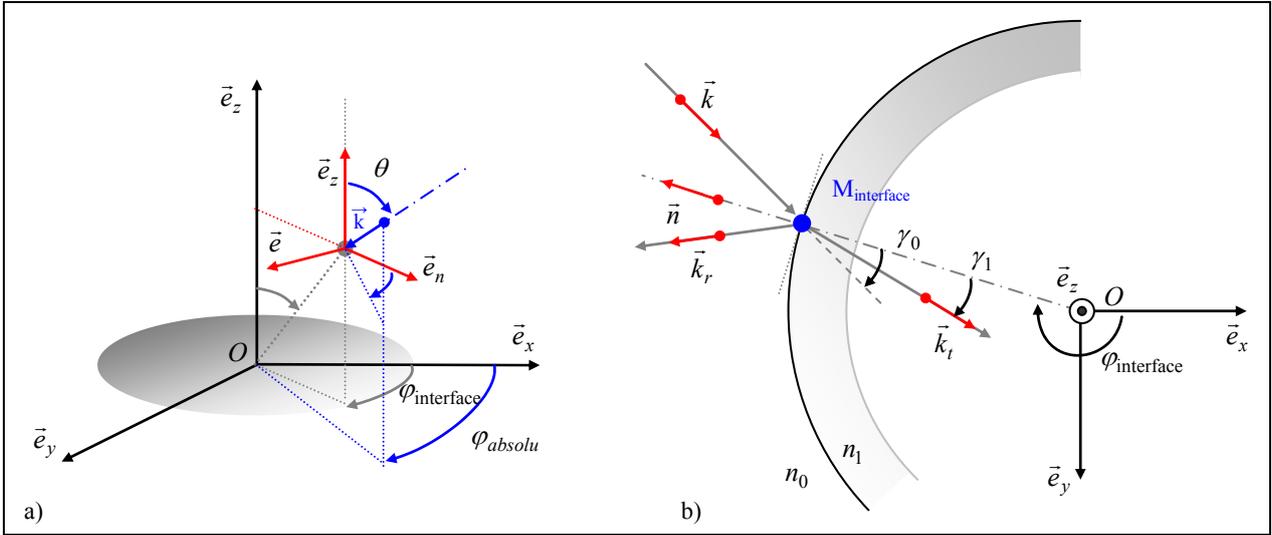


Figure 107 – (a) Définition générale du repère local ($M_{\text{interface}}, \vec{e}, \vec{e}_n, \vec{e}_z$) et du repère absolu ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), (b) Géométrie du passage à une interface (projection 2D).

Notre démarche se généralise à toutes les interfaces rencontrées par un photon : dans le sens extérieur-milieu et milieu-extérieur. Le repère cartésien local ($M_{\text{interface}}, \vec{e}, \vec{e}_n, \vec{e}_z$) est construit tel que :

- L'origine de ce repère $M_{\text{interface}}$ est prise au point d'intersection entre l'interface et le vecteur propagation incident,
- \vec{e}_n est le vecteur unitaire dont la direction et le sens sont donnés par la normale \vec{n} au point $M_{\text{interface}}$. Elle est dirigée vers l'extérieur (cas représenté sur la Figure 107) ou vers l'intérieur de la cuve en fonction du sens de propagation du photon :

$$\vec{e}_n = \begin{cases} \cos \varphi_{\text{interface}} \\ \sin \varphi_{\text{interface}} \\ 0 \end{cases} \quad \text{dans le repère absolu} \quad \text{Eq. 238}$$

- La définition de \vec{e}_z est identique à celle du repère absolu ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) :

$$\vec{e}_z = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{dans le repère absolu} \quad \text{Eq. 239}$$

- Le vecteur \vec{e} correspond au trièdre direct constituant la base du repère. Ses coordonnées sont :

$$\vec{e} = \vec{e}_n \wedge \vec{e}_z = \begin{cases} \sin \varphi_{\text{interface}} \\ \cos \varphi_{\text{interface}} \\ 0 \end{cases} \quad \text{dans le repère absolu} \quad \text{Eq. 240}$$

Les relations de Snell-Descartes sont toujours utilisées pour déterminer les vecteurs de propagation \vec{k}_r et \vec{k}_t . On introduit donc les angles γ_0 et γ_1 tels que $\cos\gamma_0 = \vec{n} \cdot \vec{k}$ et $\cos\gamma_1 = \vec{n} \cdot \vec{k}_t$. Dans le repère local, l'Eq. 91 et l'Eq. 92 restent valables. Au passage d'une interface, le photon est soit réfléchi soit réfracté. Pour déterminer l'événement, un nombre aléatoire x est comparé à la valeur de la réflectance $R_{\text{interface}}(\gamma_0)$ (cf. Eq. 93).

• **Passage du photon dans l'épaisseur de la cuve**

Il existe un angle critique γ_c au-delà duquel la luminance incidente sur une interface est complètement réfléchie. Cet angle dépend des indices de réfraction des milieux situés avant (n_i) et après (n_j) cette interface :

$$\gamma_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_i}{n_j}\right) \tag{Eq. 241}$$

Considérons que le photon est transmis dans l'épaisseur de la cuve depuis le milieu diffusant ou depuis le milieu extérieur. Si $\gamma_{\text{incident}} < \gamma_c$, le photon peut traverser l'interface par comparaison d'un nombre aléatoire avec la réflectivité de cette interface (cf. définition de $R_{\text{interface}}$ dans l'Eq. 93). Contrairement aux milieux plans, sa position à la sortie d'une double interface courbe est essentielle (i.e. cas d'une épaisseur de cuve). Le photon se propage entre les deux interfaces (air/verre et verre/liant) sans événement de diffusion ou d'absorption. On détermine la nouvelle position du photon sur la plus proche interface en fonction des normales locales notées \vec{n}_{locale} sur la Figure 108. Ces vecteurs sont calculés en chaque point $\vec{M}_{\text{interface}}$ à partir de l'Eq. 238. Ce processus est corrélé au rayon de courbure de l'interface (R_{cuve1} ou R_{cuve2}) et aux indices en présence de part et d'autres de cette même interface.

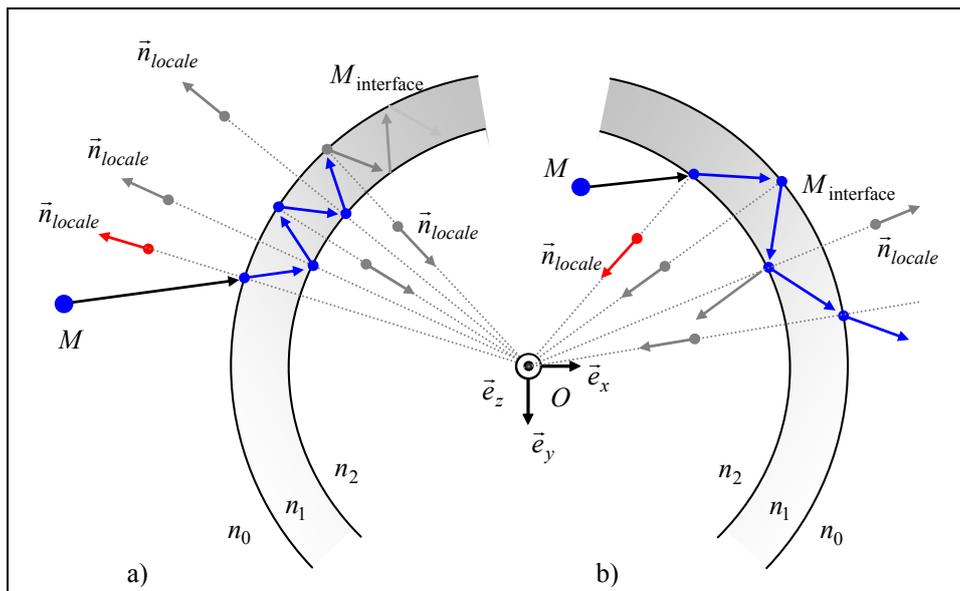


Figure 108 – Réflexions multiples dans l'épaisseur d'une cuve cylindrique (représentation 2D).

La Figure 108a présente le cas particulier d'un photon qui sera considéré comme étant perdu après N réflexions entre les deux interfaces de la cuve cylindrique. Plus généralement et après réflexions aux interfaces (cf. Figure 108b), il est réfléchi ou transmis. Sa nouvelle position $\vec{M}(x, y, z)$ est calculée de proche en proche.

- **Propagation dans le milieu diffusant (collision et diffusion), processus de détection**

La propagation du photon dans le liant est identique quelle que soit la géométrie du système. La distance de la première collision est obtenue par l'Eq. 96. Seule la distance R_i est calculée différemment (cf. Eq. 237). La procédure de détection reste également inchangée. Seul le maillage est adapté pour tenir compte de la géométrie cylindrique du milieu.

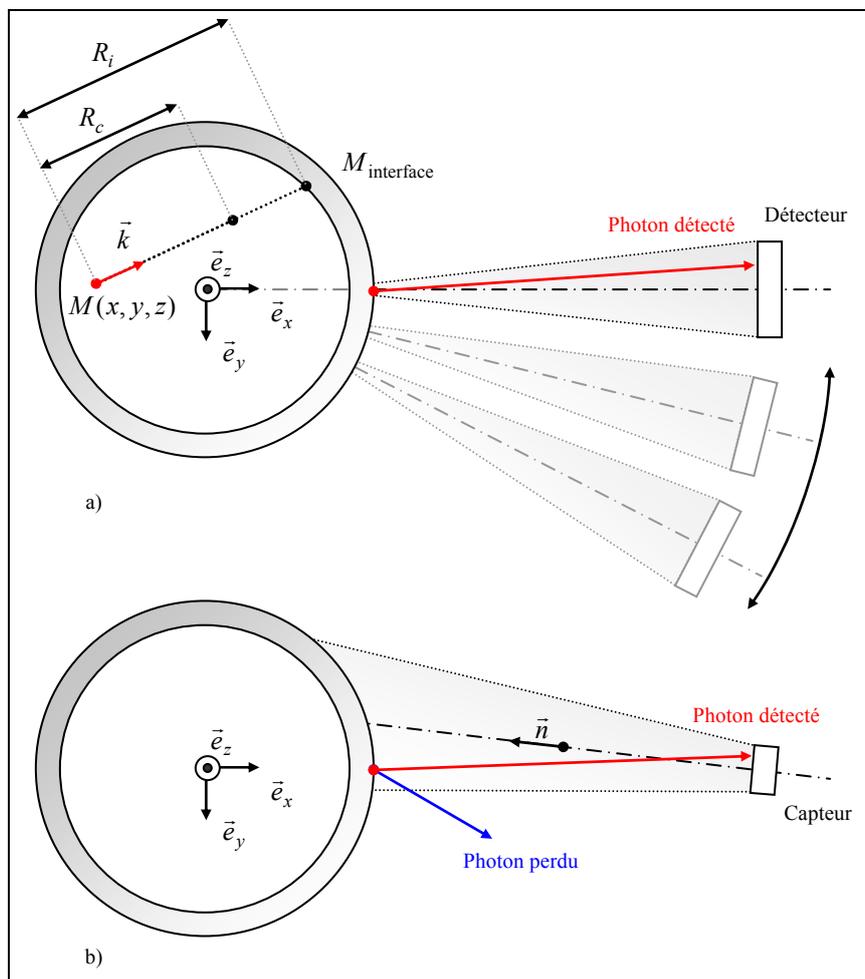


Figure 109 – Comparaison des distances R_i et R_c en projection dans le plan $(\vec{e}_x, 0, \vec{e}_y)$ pour une cuve cylindrique, (a) procédures de mesures par maillage de l'espace et (b) de mesures en champ lointain.

C2. MESURES SUR DES CUVES CYLINDRIQUES

Deux types de cuves ont été développées, avec ou sans méplat pour le faisceau laser en entrée. Cette option permet de s'affranchir des effets de focalisation du faisceau à l'intérieur de la cuve (changement des indices lors du passage des interfaces) et d'éclairer un volume restreint de l'échantillon avec un faisceau parallèle. Cette fenêtre se situe uniquement sur le parcours optique du laser. La Figure 110 présente les deux géométries de cuves cylindriques que nous avons adoptées.

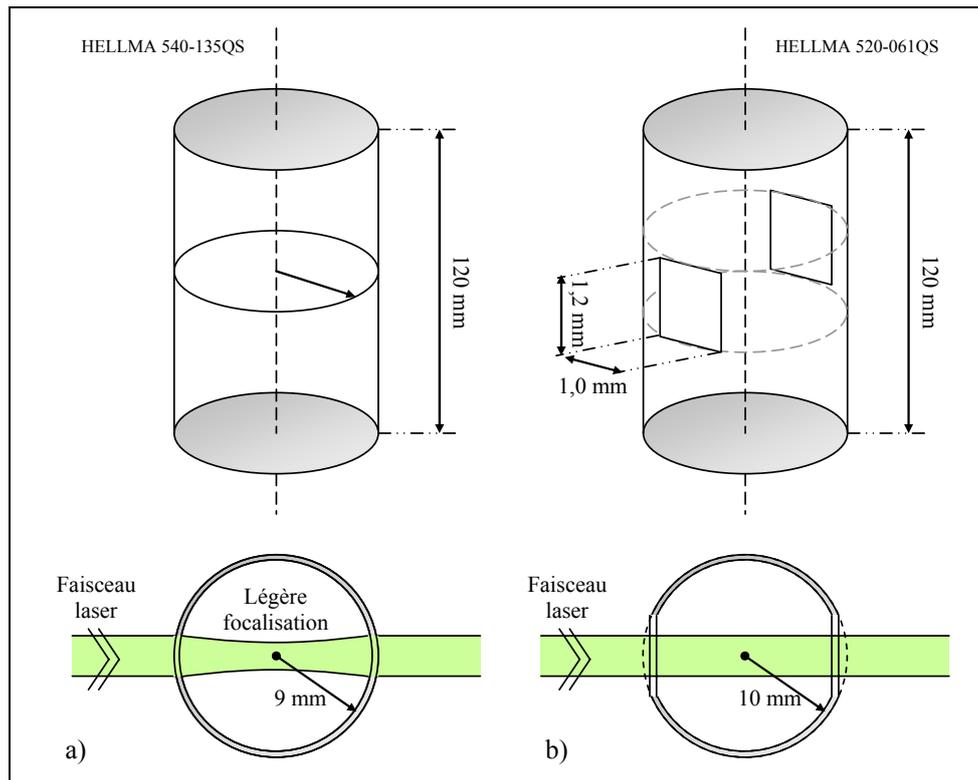


Figure 110 – Cuves cylindriques a) sans méplat ou b) avec méplat pour corriger les effets de focalisation du laser.

C3. MESURE DE LA MATRICE DE MUELLER PAR MODULATION DE LA POLARISATION

La modulation de la polarisation incidente permet de retrouver la matrice de diffusion caractérisant le milieu en diffusion simple. Cette voie est ajoutée au banc de mesure, comme le montre la Figure suivante.

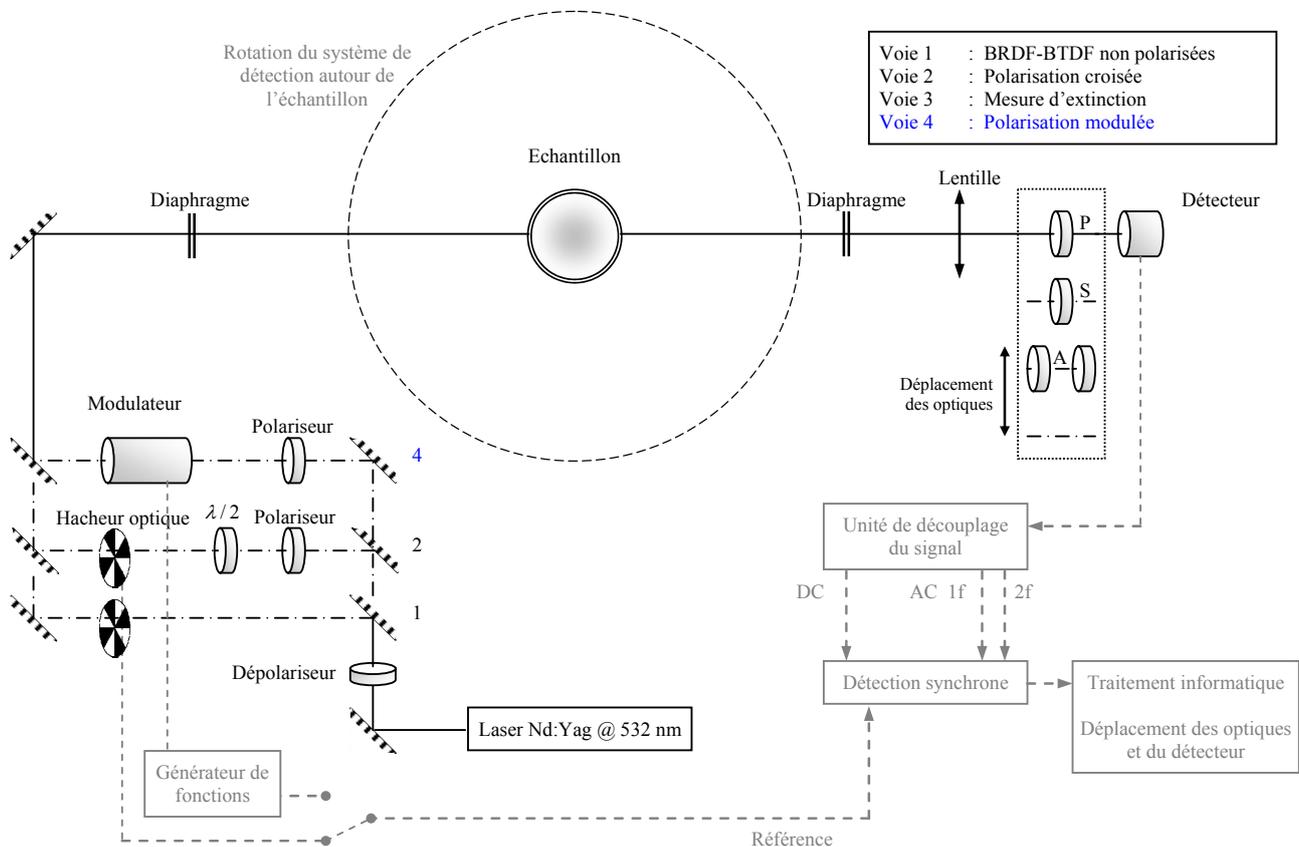


Figure 111 – Banc de mesures en optique polarisée, mesures de la diffusion angulaire (MELOPEE).

Sur cette quatrième voie de mesure, la modulation de la polarisation est obtenue à l'aide d'un **modulateur électro-optique** (utilisation d'une tension alternative). Nous présentons brièvement les caractéristiques du modèle *Conoptics 370/302* dans le Tableau 34. Par simple modification de la tension continue appliquée aux bornes du cristal d'ADP, ce modulateur peut remplacer la fonction d'une lame à retard de phase. Si la polarisation incidente est verticale et que la tension est nulle, l'état de la polarisation en sortie du modulateur est inchangé. Si la tension est égale à $U_{1/2}$, on passe d'une polarisation P à une polarisation S .

Cristal	$U_{1/2}$	Diamètre d'ouverture	Domaine de transmission	Rapport de contraste
ADP Ammonium Dihydrogen Phosphate	184 V @ 500 nm 306 V @ 830 nm	2,5 mm	300 à 700 nm	500:1 @ 633 nm

Tableau 34 – Principales caractéristiques du modulateur électro-optique.

Le modulateur est aligné sur le parcours optique de telle sorte que le faisceau entre et sorte de ce composant sans effet de distorsion. Cette opération est réalisée à faible puissance (< 200 mW, puissance minimale du laser Nd:Yag). Par rotation du support, l'axe de la polarisation est aligné suivant les axes du cristal comme décrit sur la Figure 112. Si l'état de la polarisation incidente est vertical et que l'on souhaite un état vertical en sortie, la composante rejetée par le cristal sera perpendiculaire au plan de la table optique. Réciproquement, pour un état horizontal en sortie du modulateur, le faisceau rejeté sera dans le plan défini par la table. Un alignement plus fin est réalisé en appliquant la même procédure que celle décrite pour les lames demi-onde (utilisation d'un puissance-mètre ou de l'analyseur de polarisation).

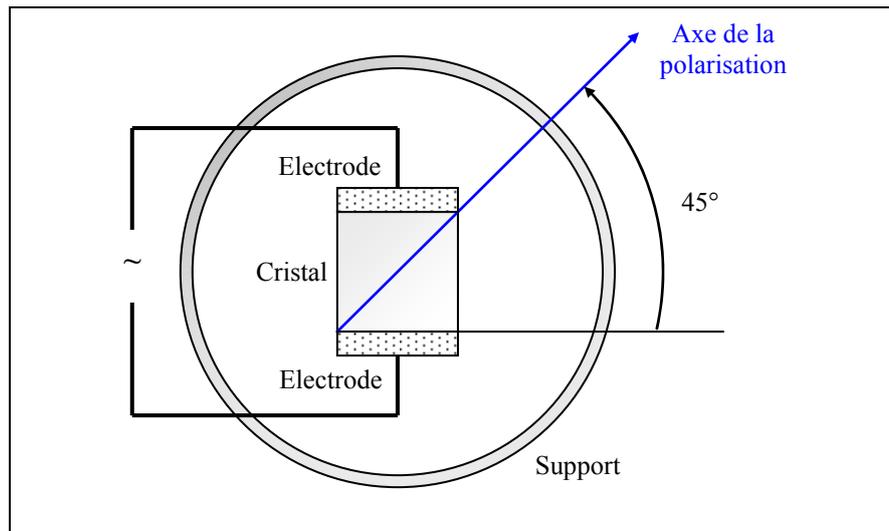


Figure 112 – Modulateur électro-optique : alignement du cristal.

En détection, les trois voies décrites dans le cas de la polarisation croisée sont complétées par une voie où est disposé un analyseur (lame quart d'onde suivie d'un polariseur). L'unité de découplage du signal sépare dans un premier temps la composante continue de la composante alternative. La détection synchrone sépare ensuite les composantes de fréquences ω et $2 \cdot \omega$ préalablement choisies et réglées grâce au générateur de fonction pilotant le modulateur. Elle présente ici la possibilité d'une mesure simultanée des deux harmoniques ω et $2 \cdot \omega$.

Pour terminer l'alignement, la position de l'ensemble détecteur-optiques-lentille et l'angle correspondant à la transmission par une densité neutre sont optimisés par itérations successives, l'objectif étant de collecter le maximum de signal sur le détecteur (hors de sa saturation).

- **Principe de la mesure en modulation de la polarisation**

En fonction des optiques utilisées, ce moyen expérimental permet de retrouver les différents éléments de la matrice de Mueller (cf. Figure 113). Les mesures sont effectuées dans le plan φ contenant le faisceau incident, pour différents angles θ de diffusion ($\mu = \cos\theta$).

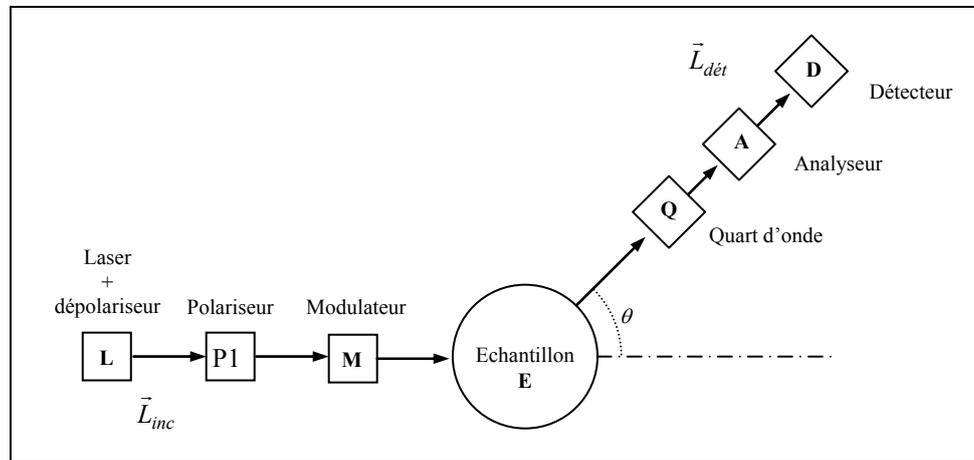


Figure 113 – Principe de mesure en polarisation modulée.

Par rapport au schéma de mesure présenté dans le cas de la polarisation croisée (cf. Figure 76), la lame demi-onde est remplacée par le modulateur électro-optique. La luminance diffusée traverse des optiques différentes avant d'être détectée. Comme précédemment, notons γ_A et γ_Q les angles formés entre le plan de référence (plan horizontal) et l'axe optique des nouveaux composants. Le vecteur de Stokes incident \vec{L}_{inc} sera modifié comme suit :

$$\vec{L}_{det} = Cte \cdot \mathbf{A}(\gamma_A) \cdot \mathbf{Q}(\gamma_Q) \cdot \mathbf{F}(\mu) \cdot \mathbf{M}(\gamma_M) \cdot \mathbf{P1}(\gamma_P) \cdot \vec{L}_{inc} \quad \text{Eq. 242}$$

Cette méthode nécessite un jeu de quatre mesures différentes avec quatre optiques différentes placées devant le détecteur. Pour chaque angle de diffusion, la détection est faite pour le signal continu et de le signal alternatif à deux harmoniques (ω et $2 \cdot \omega$) : trois mesures sont nécessaires pour chaque μ . Dans notre démarche, l'objectif est de déterminer la **matrice sphérique équivalente** qui est caractérisée par le rayon moyen de la distribution en taille. Le développement de cette voie est donc une première étape dans la caractérisation de la matrice de Mueller du milieu diffusant et dont les particules ne sont plus sphériques (mais possédant toujours un axe de symétrie).

Le modulateur électro-optique introduit une modulation sinusoïdale temporelle de la polarisation de la lumière sur le milieu diffusant. Il s'agit d'un retardateur de phase utilisant l'effet Pockel : la biréfringence résulte d'un déplacement d'ions dans un cristal cubique dépourvu de centre de symétrie (dihydrophosphate de potassium). L'indice de réfraction du cristal varie proportionnellement à la tension appliquée sur ces facettes. Ignorant la nature vectorielle des quantités physiques évoquées, l'effet du champ électrique \vec{E} sur l'indice de réfraction n_0 du cristal s'écrit :

$$\Delta n = n_0^3 \cdot r \cdot \frac{E}{2} \quad \text{Eq. 243}$$

Dans l'Eq. 243, le changement d'indice de réfraction est noté Δn , n_0 représente l'indice de réfraction lorsque aucune tension n'est appliquée et r le tenseur électro-optique. Le modulateur utilisé fonctionne en modulation de phase. Le champ électrique est appliqué le long des axes principaux du cristal et la lumière polarisée subit une différence de phase sur les autres axes.

Cette différence de phase est proportionnelle à l'intensité du champ appliqué. La tension de demi-onde $U_{\lambda/2}$ dimensionne la qualité du modulateur électro-optique. Elle désigne la tension qu'il faut appliquer pour obtenir un déphasage de 180° . La différence de phase ϕ s'exprime en fonction de cette grandeur et de la tension de modulation U appliquée entre les électrodes :

$$\phi = \pi \cdot \frac{U}{U_{\lambda/2}} \quad \text{Eq. 244}$$

Le modulateur est piloté par un générateur de fonctions qui fournit une tension sinusoïdale de fréquence f . Dans l'Eq. 244, la différence de phase introduite entre les composantes parallèle et perpendiculaire de l'onde incidente se réécrit en fonction de la fréquence f de la tension de modulation U :

$$\phi = \phi_{\max} \cdot \sin f t \quad \text{Eq. 245}$$

La matrice de Mueller du modulateur pour une orientation γ arbitraire est donnée par :

$$\mathbf{M}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\gamma + \sin^2 2\gamma \cos \phi & \sin 2\gamma \cos 2\gamma (1 - \cos \phi) & -\sin 2\gamma \sin \phi \\ 0 & \sin 2\gamma \cos 2\gamma (1 - \cos \phi) & \sin^2 2\gamma + \cos^2 2\gamma \cos \phi & \cos 2\gamma \sin \phi \\ 0 & \sin 2\gamma \sin \phi & -\cos 2\gamma \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 246}$$

En utilisant les fonctions de Bessel $J_k(x)$ au premier ordre, les *sinus* et *cosinus* sont remplacés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \sin(\phi_{\max} \cdot \sin f t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(\phi_{\max}) \cdot \sin((2k-1)f t) \\ \cos \phi &= \cos(\phi_{\max} \cdot \sin f t) = J_0(\phi_{\max}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\phi_{\max}) \cdot \cos(2k f t) \end{aligned} \quad \text{Eq. 247}$$

En général, l'amplitude de la tension de modulation est telle que le premier terme des fonctions de Bessel $J_0(\phi_{\max})$ soit nul. Cette condition est vérifiée si $\phi_{\max} = 2,40483$ rad. L'Eq. 247 se simplifie :

$$\begin{aligned} \sin \phi &= 2J_1(\phi_{\max}) \sin f t + \text{termes en } k \geq 2 \\ \cos \phi &= 2J_2(\phi_{\max}) \cos 2f t + \text{termes en } k \geq 2 \end{aligned} \quad \text{Eq. 248}$$

Combinée avec une détection synchrone, la modulation augmente l'efficacité de mesure et offre la possibilité de déterminer plusieurs éléments de la matrice de diffusion $\mathbf{P}(\theta)$ à partir d'une seule mesure. L'Eq. 242 permet de relier le vecteur de Stokes détecté au vecteur incident. Cependant, le détecteur est non polarisé et ne mesure qu'une intensité proportionnelle au premier élément de \vec{L}_{inc} . Pour expliciter ce terme, on introduit les matrices de Mueller des différents composants optiques dans l'Eq. 242. L'analyseur (\mathbf{A}) est identique au polariseur ($\mathbf{P1}$) placé en entrée. Sa matrice de Mueller est donc équivalente à celle de $\mathbf{P1}(\gamma_{P1})$ définie dans le chapitre IV.

La matrice de Mueller d'une lame quart d'onde \mathbf{Q} est définie par :

$$\mathbf{Q}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\gamma & \sin 2\gamma \cos 2\gamma & -\sin 2\gamma \\ 0 & \sin 2\gamma \cos 2\gamma & \sin^2 2\gamma & \cos 2\gamma \\ 0 & \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 249}$$

La lumière polarisée issue du laser est arbitrairement fixée : elle est soit verticale (P), soit horizontale (S). On suppose que le vecteur de Stokes incident est polarisé rectilignement tel que $\vec{L}_{inc} = (1,1,0,0)$. Le flux correspondant au premier élément du vecteur de Stokes diffusé et atteignant le détecteur est obtenu à partir de l'Eq. 248 en négligeant les termes d'ordre supérieur à $k = 1$:

$$I_{det}(\theta) = Cte' \cdot (DC(\theta) + 2J_1(\phi_{\max}) \cdot AC_f(\theta) \cdot \sin f t + 2J_2(\phi_{\max}) \cdot AC_{2f}(\theta) \cdot \cos 2f t) \quad \text{Eq. 250}$$

On note Cte' la constante de réglage optique spécifique, $DC(\theta)$ la composante continue (*direct current*) du signal, $AC_f(\theta)$ et $AC_{2f}(\theta)$ les composantes sinusoïdales (*alternating current*) de fréquence f et $2f$. Ces différentes composantes sont séparées par l'unité de découplage et la détection synchrone. Ces trois mesures suffisent pour déterminer la dépendance angulaire de tous les éléments de la matrice de diffusion du milieu. Cette détermination dépend de l'orientation et/ou de la présence des optiques (polariseur, modulateur, lames demi onde et quart d'onde). Le tableau suivant présente les huit combinaisons possibles.

Combinaisons	γ_{P1}	γ_M	γ_Q	γ_A	$DC(\theta)$	$AC_f(\theta)$	$AC_{2f}(\theta)$
1	0°	-45°	-	-	P_{11}	$-P_{14}$	P_{12}
2	0°	-45°	-	0°	$P_{11} + P_{21}$	$-(P_{14} + P_{24})$	$P_{12} + P_{22}$
3	0°	-45°	-	45°	$P_{11} + P_{31}$	$-(P_{14} + P_{34})$	$P_{12} + P_{32}$
4	0°	-45°	0°	45°	$P_{11} + P_{41}$	$-(P_{14} + P_{44})$	$P_{12} + P_{42}$
5	45°	0°	-	-	P_{11}	$-P_{14}$	P_{13}
6	45°	0°	-	0°	$P_{11} + P_{21}$	$-(P_{14} + P_{24})$	$P_{13} + P_{23}$
7	45°	0°	-	45°	$P_{11} + P_{31}$	$-(P_{14} + P_{34})$	$P_{13} + P_{33}$
8	45°	0°	0°	45°	$P_{11} + P_{41}$	$-(P_{14} + P_{44})$	$P_{13} + P_{43}$

Tableau 35 – Détermination des éléments de la matrice de Mueller.

Pour s'affranchir des constantes de proportionnalité telle que Cte' , nous réalisons le rapport des signaux alternatifs et continus (AC/DC). Le Tableau 35 permet d'accéder directement aux valeurs de $P_{11}(\theta)$, $P_{12}(\theta)/P_{11}(\theta)$, $P_{13}(\theta)/P_{11}(\theta)$ et $P_{14}(\theta)/P_{11}(\theta)$. Nous avons montré dans le premier chapitre que pour un ensemble de particules orientées aléatoirement, la matrice de diffusion était symétrique telle que $P_{ij}/P_{11} = \pm P_{ji}/P_{11}$ pour $i \neq j$. La combinaison des différents signaux permet donc de déduire les autres éléments F_{ij} . Par exemple, si on se place dans le deuxième cas du Tableau 35, $P_{24}(\theta)/P_{11}(\theta)$ est déterminé par le rapport du signal alternatif en f et du signal continu :

$$\frac{AC_f}{DC} = -\frac{P_{14} + P_{24}}{P_{11} + P_{21}} = -\frac{\frac{P_{14}}{P_{11}} + \frac{P_{24}}{P_{11}}}{1 + \frac{P_{12}}{P_{11}}} \quad \text{d'où} \quad \frac{P_{24}}{P_{11}} = -\left(\frac{P_{14}}{P_{11}} + \frac{AC_f}{DC} \cdot \left(1 + \frac{P_{12}}{P_{11}}\right)\right) \quad \text{Eq. 251}$$

Sous cette hypothèse, l'ensemble des termes être évalué de proche en proche. Le calibrage et l'étalonnage de ce moyen sont actuellement en cours de développement et ne sont pas abordés ici.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [01] Priezhev A. V., *Light scattering from single red blood cells and cell suspensions*, 8th Conference on Electromagnetic and Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory - Measurements and Applications, 273-274.
- [02] Ghislain Franssens et al., *Determination of the aerosol size distribution by analytic inversion of the extinction spectrum in the complex anomalous diffraction approximation*, Applied Optics, 39(24), 4214, 2000.
- [03] Kaller W., *A new polar nephelometer for measurement of atmospheric aerosols*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 87, 107-117, 2004.
- [04] Dimitri E., *Imagerie flash laser IFL dans l'atmosphère turbulente. Etude des fluctuations de l'éclairement dans le plan image*, Thèse ENSAE n°389, 2004.
- [05] Baba J.S., Chung J.R., DeLaughter A.H., Cameron B.D., Coté G.L., *Development and calibration of an automated Mueller matrix polarization imaging system*, Journal of Biomedical Optics, 7(3), 341-349, Juillet 2002.
- [06] Pujol O., Georgis J.F., Chong M., Roux F., *Dynamics and microphysics of orographic precipitation during MAP-IOP3*, Quat. Journ. Roy. Meteor Soc., 131, 2795-2819, 2005.
- [07] Breugnot S., Clémenceau P., *Modeling and performances of a polarization active imager at 806 nm*, Optical Engineering, 39(10), 2681-2688, Octobre 2000.
- [08] Santo Valentin Salinas Cortijo, *Multi-dimensional polarized radiative transfer modeling of Titan's atmosphere*, 2003.
- [09] Augereau J.C., *Light scattering in protoplanetary and debris disks: beyond the Mie theory*, 8th Conference on Electromagnetic and Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory - Measurements and Applications, 25-27, Mai 2005.

- [10] Gossé S., Hespel L., Gossart P., Delfour A., *Morphological characterization and particle sizing of alumina particles in solid rocket motor*, Journal of Propulsion and Power, 22(1), 127-135, Janvier 2006.
- [11] Harrington R.F., *Field computation by moment method*, New York - Macmillan, 1968.
- [12] Chanal H., *Etude de la diffusion optique par des matériaux hétérogènes rugueux : diffusions surfacique, volumique et couplage surface/volume*, Thèse ENSAE n°440, Décembre 2005.
- [13] Stamnes K., Tsay S.C., Wiscombe W., Jayaweera K., *Numerically stable algorithm for discrete-ordinate-method radiative transfer in multiple scattering and emitting layered media*, Applied Optics, 27, 2502-2509, 1988.
- [14] S. A. Prahl, A. J. Welch, M. J. C. van Gemert, *Optical-thermal response of laser irradiated tissue : 5. The adding-doubling method*, Plenum Press, 101-129, 1995.
- [15] Auger J.C., Stout B., Lafait J., *Dependant light scattering in dense heterogeneous media*, Physica B, 279, 21-24.
- [16] Cartigny J.D., Yamada Y., Tien C.L., *Radiative transfer with dependant scattering by particles : Part I, theoretical investigation*, Journal of Heat Transfer, 108, 608-613.
- [17] Da Silva A., *Etude théorique et expérimentale de la diffusion de la lumière dans des milieux hétérogènes denses multicouches*, Thèse Université Paris 6, 2001.
- [18] Durand S., *Propagation de la lumière en milieu aléatoire. Rôle de l'absorption, de la diffusion dépendante et du couplage surface-volume*, Ecole Centrale Paris.
- [19] K.F. Evans, G.L. Stephens, *A new polarized atmospheric radiative transfer model*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 46(5), 413-423, 1991.
- [20] L. Hespel, A. Delfour, *Mie light scattering granulometer with adaptive numerical filtering, I. Theory*, Applied Optics, 39(36), 6897-6917, Décembre 2000.
- [21] L. Hespel, A. Delfour, B. Guillame, *Mie light-scattering granulometer with an adaptive numerical filtering method, II. Experiments*, Applied Optics, 40(6), 974-985, Février 2001.
- [22] Compain E., Drevillon B., *Complete high-frequency measurement of Mueller matrices based on a new coupled-phase modulator*, Rev. Sci. Instrum., 68(7), 2671-2680, Juillet 1997.
- [23] Delplancke F., *Automated high-speed Mueller matrix scatterometer*, Applied Optics, 36(22), 5388-5395, Août 1997.
- [24] Bueno J.M., *Polarimetry using liquid-crystal variable retarders: theory and calibration*, J. Opt. A : Pure Appl. Opt., 2, 216-222, 2000.

- [25] Mujat M., Dogariu A., *Real-time measurement of the polarization transfer function*, Applied Optics, 40(1), 34-44, Janvier 2001.
- [26] Compain E., Drevillon B., *High-frequency modulation of the four states of polarization of light with a single phase modulator*, Rev. Sci. Instrum., 69(4), 1574-1580, Avril 1998.
- [27] Kuik F., Stammes P., Hovenier J.W., *Experimental determination of scattering matrices of water droplets and quartz particles*, Applied Optics, 30(33), 4872-4881, 1991.
- [28] Hongsong Li, Sing Choong Foo, Kenneth E. Torrance, Stephen H. Westin, *Automated three-axis gonioreflectometer for computer graphics applications*, SPIE Institute Series, 5878-29.
- [29] Kuga Y., Ishimaru A., *Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles*, Journal of the Optical Society of America A, 8, 831, 1984.
- [30] Laurent Hespel, *Etude expérimentale et théorique du transfert radiatif dans les milieux diffusants. Détermination expérimentale des propriétés radiatives aux forts taux de charge*, Thèse Ecole Centrale Paris n°14, Mai 1999.
- [31] Zhu Ciyou, Byrd Richard H., Lu Peihuang, Nocedal Jorge, *L-BFGS-B : Fortran subroutines for large-scale bound constrained optimization*, Northwestern University - Department of Electrical Engineering and Computer Science, Décembre 1994.
- [32] Fletcher R., Reeves C.M., *Function minimization by conjugate gradients*, The Computer Journal, 7, 149-154, 1964.
- [33] Laurent Hespel, Stéphane Mainguy, Jean-Jacques Greffet, *Radiative properties of scattering and absorbing dense media: theory and experimental study*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 77, 193-210, 2003.
- [34] S. Chandrasekhar, *Radiative transfer*, Dover - New York, 1960.
- [35] H. C. van de Hulst, *Light scattering by small particles*, Ed. Dover Publications New York, ISBN 0-486-64228-3, 1981.
- [36] Serge Huard, *Polarisation de la lumière*, Ed. Masson, ISBN 2-225-84300-7, 1994.
- [37] Stokes G.G., *On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources*, Trans. Camb. Philos. Soc., 9, 399, 1852.
- [38] R. Schuh, T. Wriedt, *Computer programs for light scattering by particles with inclusions*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 70(2001), 715-723, 2001.
- [39] Bruce T. Draine, Piotr J. Flatau, *User guide for the Discrete Dipole Approximation Code DDSCAT, Version 5a10*, ArXiv:astro-ph/0008151 v4 18 oct 2002, 1-41, Mai 2002.

- [40] L. Tsang, J.A. Kong, R.T. Shin, *Theory of microwave remote sensing*, Wiley, New York, 1985.
- [41] Michael I. Mishchenko, Joachim W. Hovenier, Larry D. Travis, *Light scattering by nonspherical particles*, Ed. Academic Press, ISBN 0-12-498660-9, 2000.
- [42] Michael I. Mishchenko, Larry D. Travis, Andrew A. Lacis, *Scattering, absorption and emission of light by small particles*, ISBN 0 521 78252, 2002.
- [43] Michael I. Mishchenko, Larry D. Travis, *Capabilities and limitations of a current Fortran implementation of the T-matrix method for randomly oriented, rotationally symmetric scatterers*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 60(3), 309-324, 1998.
- [44] R.D.M. Garcia, C.E. Siewert, *The FN method for multigroup transport theory with upscattering*, Nuclear science and engineering, 130, 194-212, Octobre 1998.
- [45] R.D.M. Garcia, C.E. Siewert, *The FN method for radiative transfer models that include polarization effects*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 41(2), 117-145, 1989.
- [46] Hottel H.C., Sarofim A.F., *Radiative transfer*, ed. New-York Mc Graw Hill, 520p, 1967.
- [47] Kisselev V.B., Roberti L., Perona G., *An application of the finite element method to the solution of the radiative transfer equation*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 51(4), 603-614, 1994.
- [48] H.C. van de Hulst, *A new look at multiple scattering*, NASA Institute for Space Studies - New York, 1962.
- [49] K.F. Evans, G.L. Stephens, <http://nit.colorado.edu/~evans/PolRadTran.tar>, code source en Fortran 77.
- [50] M. Born, E. Wolf, *Principles of optics, quatrième édition*, Pergamon Press Ltd, 1970.
- [51] V.A. Ambartsumian, *Diffuse reflection of light by a foggy medium*, Compt. Rend (Doklady) Akad URSS, 38-257, 1943.
- [52] K.N. Liou, *An introduction to atmospheric radiation*, Academic Press - New York, 1980.
- [53] M.N. Özisik, *Radiative transfer and interaction with conduction and convection*, John Wiley and Sons - New York, 575, 1973.
- [54] G.N. Plass, G.W. Kattawar, F.E. Catchings, *Matrix operator theory of radiative transfer. I: Rayleigh scattering*, Applied Optics, 12, 314-329, 1973.
- [55] W.J. Wiscombe, *On initialization, error and flux conservation in the doubling method*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 16, 637-658, 1976.

- [56] I.P. Grant, G.E. Hunt, *Solution of radiative transfer problems using the invariant Sn method*, Monthly notices of the royal astronomical society, 141, 27-41, 1968.
- [57] W.M. Irvine, *Multiple scattering by large particles*, Astrophysical Journal, 142, 1463-1475, 1965.
- [58] Godsalve C, *The inclusion of reflectances with preferred direction in radiative transfer calculations*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 53(3), 289-305, 1995.
- [59] Hester Volten et al., *Laboratory measurements and T-matrix calculations of the scattering matrix of rutile particles in water*, Applied Optics, 38(24), 5232-5240, Août 1999.
- [60] K. Franklin Evans, Graeme L. Stephens, *Microwave radiative transfer through clouds composed of realistically shaped ice crystals. Part I: single scattering properties*, Journal of the Atmospheric Sciences (Am. Meteorological Society), 52(11), 2041-2057, Juin 1995.
- [61] Michael I. Mishchenko, Larry D. Travis, Daniel W. Mackowski, *T-matrix computations of light scattering by nonspherical particles : a review*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 55(5), 535-575, 1996.
- [62] K. Franklin Evans, Graeme L. Stephens, *Microwave radiative transfer through clouds composed of realistically shaped ice crystals. Part II: remote sensing of ice clouds*, Journal of the Atmospheric Sciences (Am. Meteorological Society), 52(11), 2058-2072, Juin 1995.
- [63] B. Maheu, J.P. Briton, G. Gouesbet, *Four-flux model and a Monte Carlo code: comparisons between two simple, complementary tools for multiple scattering calculations*, Applied Optics, 28(1), 22-24, Janvier 1989.
- [64] L.B. Barichello, C.E. Siewert, *On the equivalence between the discrete ordinates and the spherical harmonics methods in radiative transfer*, Nuclear science and engineering, 130, 79-84, Septembre 1998.
- [65] Kinsell L. Coulson, Jitendra V. Dave, Zdenek Sekera, *Tables related to radiation emerging from a planetary atmosphere with Rayleigh scattering*, University of California press Berkeley, 1960.
- [66] J.W. Hovenier, *Symmetry relationships for scattering of polarized light in a slab of randomly oriented particles*, Journal of the Atmospheric Sciences (Am. Meteorological Society), 26, 488-499, 1969.
- [67] Ishimaru A., *Wave propagation and scattering in random media*, Academic Press, 1978.
- [68] G. Gréhan, G. Gouesbet, B. Maheu, K.F. Ren, *Electromagnetic scattering of shaped beams, General Lorenz-Mie Theory*, Mars 1998.
- [69] I. P. Grant, G. E. Hunt, *Radiative transfer in a Rayleigh scattering atmosphere*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 8, 1817-1832, 1968.

- [70] C.E. Siewert, *On the inverse problem for a three-term phase function*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 22(5), 441-446, 1979.
- [71] A.J. Silva Neto, M.N. Özisik, *An inverse analysis of simultaneously estimating phase function, albedo and optical thickness*, Developments in Radiative Heat Transfer, 203, 23-30, 1992.
- [72] J.C. Oelund, N.J. McCormick, *Sensitivity of multiple-scattering inverse transport methods to measurement errors*, Journal of the Optical Society of America A, 2(11), 1972-1978, Novembre 1985.
- [73] Dunn W.L., *Inverse Monte Carlo analysis*, J. Comput. Phys., 41, 154-166, 1981.
- [74] Dunn W.L., *Inverse Monte Carlo solutions for radiative transfer in inhomogeneous media*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 29, 19-26, 1983.
- [75] L.G. Henyey, J.L. Greenstein, *Diffusion radiation in the galaxy*, Astrophysical Journal, 93, 70-83, 1941.
- [76] R. Sanchez, N.J. McCormick, *Numerical evaluation of optical single-scattering properties using multiple-scattering inverse transport methods*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 28(3), 169-184, 1982.
- [77] Carole Duvignac, *Caractérisation et modélisation numérique des dégradations des peintures blanches en environnement spatial simulé*, numéro d'ordre 378, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Décembre 2003.
- [78] W.J. Wiscombe, J.H. Joseph, *The range of validity of the Eddington approximation*, 32, 362-377, 1977.
- [79] Malik Chami, Richard Santer, Eric Dilligeard, *Radiative transfer model for the computation of radiance and polarization in an ocean-atmosphere system : polarization properties of suspended matter for remote sensing*, Applied Optics, 40(15), 2398, 2001.
- [80] W.J. Wiscombe, *The delta-M method: rapid yet accurate radiative flux calculations for strongly asymmetric phase functions*, Journal of the Atmospheric Sciences (Am. Meteorological Society), 34, 1408-1422, Septembre 1977.
- [81] J.H. Joseph, W.J. Wiscombe, J.A. Weinman, *The delta-Eddington approximation for radiative flux transfer*, Journal of the Atmospheric Sciences (Am. Meteorological Society), 33, 2452-2459, Décembre 1976.
- [82] Y.-X. Hu, B. Wielicki, B. Lin, G. Gibson, S.-C. Tsay, K. Stamnes, T. Wong, *Delta-fit: a fast and accurate treatment of particle scattering phase functions with weighted singular-value decomposition least-squares fitting*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 65(2000), 681-690, 2000.

- [83] Chiara Levoni, Elsa Cattani, Marco Cervino, Rodolfo Guzzi, Walter Di Nicolantonio, *Effectiveness of the MS-method for computation of the intensity field reflected by a multi-layer plane-parallel atmosphere*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 69(2001), 635-650, 2001.
- [84] Vicente de Paulo Nicolau, *Identification des propriétés radiatives des matériaux semi-transparents diffusants*, 94ISAL0001, 1994.
- [85] Denis J.E., Schnabel R.B., *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Prentice-Hall Inc - New Jersey, 1983.
- [86] Polak E., *Computational methods in optimization : a unified approach*, Academic Press, 1971.
- [87] Mie Gustav, *Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen*, Annalen der physik, 3, 377-445, Janvier 1908.
- [88] Hensel E., *Inverse theory and applications for engineers*, Englewood Cliffs - NJ Prentice Hall, 322p, 1991.
- [89] Sanchez R., McCormick N.J., Yi H.C., *Iterative inverse radiative transfer method to estimate optical thickness and surface albedo*, Transport Theory and Statistical Physics, 19, 357-385, 1990.
- [90] Beale E.M.L., *Numerical methods for nonlinear optimization: a derivation of conjugate gradients*, Ed. Lootsma F.A. - Academic Press - London, 39-43, 1972.
- [91] Powel J.M.D., *Restart procedures for the conjugate gradient method*, Math. Prog., 12, 241, 1977.
- [92] Denis J.E., Schnabel R.B., *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Prentice-Hall Inc - New Jersey, 1983.
- [93] Navon I.M., Phua P.K.H., Ramamurthy M., *Vectorization of conjugate-gradient methods for large-scale minimization in meteorology*, Journal of optimization theory and applications, 66(1), 71-93, Juillet 1990.
- [94] Shanno D.F., Phua K.H., *Remark on algorithm 500*, ACM Transactions on Mathematical Software, 6, 618-622, 1980.
- [95] Shanno D.F., Phua K.H., *Algorithm 500: minimization of unconstrained multivariable functions*, ACM TOMS, 2(1), 87-94, Mars 1976.
- [96] Vanderplaats Garret N., *CONMIN user's manual, a Fortran program for constrained function minimization*, NASA TM X-62 -282, 1991.
- [97] Byrd Richard H., Lu Peihuang, Nocedal Jorge, Zhu Ciyou, *A limited memory algorithm for bound constrained optimization*, Northwestern University - Department of Electrical Engineering and Computer Science, Mai 1994.

- [98] Moré J.J., Thuente D.J., *On line search algorithms with guaranteed sufficient decrease*, Mathematics and Computer Science Division, Preprint MCS-P153-0590 - Argonne National Laboratory, 1990.
- [99] Calamai P.H., Moré J.J., *Projected gradient methods for linearly constrained problems*, Mathematical Programming, 39, 93-116, 1987.
- [100] Conn A.R., Gould N.I.M., Toint Ph.L., *Global convergence of a class of trust region algorithms for optimization with simple bounds*, SIAM J. Numer. Anal., 25, 433-460, 1988.
- [101] Corana A., Marchesi M., Martini C., Ridella S., *Minimizing multimodal functions of continuous variables with the simulated annealing algorithm*, ACM Transactions on Mathematical Software, 13(3), 262-280, 1987.
- [102] Bertsekas D.P., *Projected Newton methods for optimization problems with simple constraints*, SIAM J. Control and Optimization, 20, 221-246, 1982.
- [103] Burke J.V., Moré J.J., *On the identification of active constraints*, SIAM J. Numer. Anal., 25(5), 1197-1211, 1988.
- [104] Lemaréchal C., *Lagrangian relaxation: Computational combinatorial optimization*, ed. Jünger M. - Naddef D. - SpringerVerlag - Heidelberg, 115-160, 2001.
- [105] Dantzig G., *Selected publications of George B. Dantzig*, Math. Prog., 24, 1985.
- [106] Roweis S., *Levenberg-Marquardt optimization*, Dept. Computer Science - University of Toronto (Canada), Novembre 1996.
- [107] Dobson A., *An introduction to generalized linear models*, London: Chapman - Hall, 1990.
- [108] Hansen J.E., Travis L.D., *Light scattering in planetary atmospheres*, Space Science Revue, 16, 527-610, 1974.
- [109] Zubko E., Shkuratov Y., Hart M., Eversole J., Videen G., *Backscattering and negative polarization of agglomerate particles*, Optics Letters, 28(17), 1504-6, Septembre 2003.
- [110] Tishkovets V. P., *Negative polarization of light scattered by closely packed disperse media*, Optics Letters, Lunar and Planetary Science (28), Kharkiv Astronomical observatory - Ukraine, 2003.
- [111] Rivière N., Hespel L., Gréhan G., *Schemes of calculations and measurements of polarized radiative properties of dense media with intermediate optical thickness*, 8th Conference on Electromagnetic and Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory - Measurements and Applications, Salobrena - Granada (Espagne), 278-281, Mai 2005.
- [112] Rivière N., Hespel L., Gréhan G., *Contribution of the polarisation to the study of slightly dense or optically thick diffusing mediums*, ASFERA 20ème CFA, Paris, Décembre 2004.

- [113] HO C.H., Özisik M.N., *Inverse radiation problems in inhomogeneous media*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 40(5), 553-560, 1988.
- [114] Ho C.H., Özisik M.N., *An inverse radiation problem*, Int. J. Heat. Mass. Transfer, 32(2), 335-341, 1989.
- [115] Kamuito K., *A constrained least-squares method for limited inverse scattering problems*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 40(1), 47-50, 1988.
- [116] Lines R.W., *The electrical sensing method (the Coulter principle). Particle size analysis*, Particle size analysis - Ed. Stanley-Wood Lines, Royal Society of Chemistry (92), 350-373, 1991.
- [117] Lee H.S., Chae S.K., Liu B.Y.H, *Size characterization of liquid-borne particles by light scattering counter*, Part. Part. Syst. Charact., 6, 93-99, 1989.
- [118] Ferri F., Bassini A., Paganini E., *Commercial spectrophotometer for particle sizing*, Applied Optics, 36(4), 885-891, 1997.
- [119] Gabas N., Hiquily N., Laguerrie C., *Reponse of a laser diffraction particle sizer to anisometric particles*, Part. Part. Syst. Charact., 11, 121-126, 1994.
- [120] Jones M.R., Brewster M.Q., Yamada Y., *Application of a generic algorithm to the optical characterization of ropellant smoke*, Journal of Thermohysics and Heat Transfer, 10(2), 372-377, 1996.
- [121] Munoz O., Moreno F., Molina A., Guirado D., Ramos J.L., Lopez A., Girela F., Costillo L.P., *The new IAA light scattering facility*, 8th Conference on Electromagnetic and Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory - Measurements and Applications, 245, Mai 2005.
- [122] Drolen B.L., Kumar S., Tien C.L., *Experiments on dependant scattering of radiation*, AIAA 22nd Thermophysics Conference, Honolulu - Hawaiï, 1987.
- [123] Georgiev G.T., Butler J.J., *The effect of incident light polarization in Spectralon BRDF measurement*, Proceeding of SPIE, 5570, 492-502, Novembre 2004.

